Optimal förvaltning av fondförsäkring inom tjänstepension

Examensarbete utfört i Finansiell matematik
vid Tekniska högskolan i Linköping
av

Meryem Savas

LIU-IEI-TEK-A--12/01286--SE

Handledare: **Jörgen Blomvall**
IEI, Linköpings universitet

Examinator: **Jörgen Blomvall**
IEI, Linköpings universitet

Linköping, 18 april, 2012

Abstract

The goal of this master thesis is to generate a mathematical investment model, which creates optimal asset allocations. The investment model will serve as a tool for a future website that impartiality compares different insurance policies and provide information regarding insurance. The optimal investment allocations from the model is intended for savings in unit-linked insurance as an alternative to something in Sweden called traditional insurance and it refers to pension savers who lack financial knowledge.

The model is based on power utility function, and it takes into account a ratio of future premium payments from employers and current invested capital for adjustment of the risk in the investments. Young pension savers with many years left to retirement are, thereby, exposed to a greater risk than savers near retirement age. The model determines the assets 'excess returns with the Black-Litterman model. A parameter determines the deviation from the CAPM equilibrium towards the assets' historical performance. The thesis is commissioned by ^{fm}Försäkringsmatematik AB and has been performed on the Department of Management and Engineering at Linköping University.

Sammanfattning

Målet med examensarbetet är att skapa en matematisk investeringsmodell som skapar optimala tillgångsallokeringar. Investeringsmodellen ska utgöra ett verktyg på en framtida hemsida som oberoende ska jämföra olika försäkringar och tillgängliggöra försäkringsinformation. De optimala investeringsförslagen från modellen avser besparingar inom fondförsäkring som ett alternativ till traditionell försäkring och rör pensionssparare som saknar finansiell kunskap.

Modellen grundar sig på en power-nyttofunktion, risken justeras genom att modellen tar hänsyn till en kvot mellan framtidspremieinbetalningar från arbetsgivare och investerat nuvarande kapital. En ung besparare med många år kvar i arbetslivet har därmed en större risk för investerat kapital än någon som befinner sig nära pensionsålder. Modellen bestämmer tillgångarnas överavkastning genom Black-Litterman modellen som genom en parameter bestämmer avvikelsen från jämviktsläget i CAPM mot tillgångarnas historiska prestation. Examensarbetet är beställt av ^{fm}Försäkringsmatematik AB och det har utförts vid institutionen för ekonomisk och industriell utveckling på Linköpings Universitet.

Tack

Först och främst vill jag tacka medarbetarna på ^{fm}Försäkringsmatematik där examensarbetet har ägt rum. Framförallt Stig Aggevall som har möjliggjort examensarbetet och Grunnar Roos som bistått med värdefull information om de matematiska algoritmer som används av försäkringsbolagen.

Vidare vill jag tacka opponenterna Daniel Linderholm och Patric Pålsson som har bidragit med konstruktiv kritik till examensarbetet.

Slutligen vill jag tillägna ett stort tack till min handledare Jörgen Blomvall, universitetslektor på Institutionen för Ekonomisk och Industriell utveckling på Linköpings universitet som har gett mig bra vägledning och stöd under hela examensarbetet.

Innehåll

1 Introduktion **1**

1.1 Bakgrund 1
1.2 Problembeskrivning 2
1.3 Syfte 2
1.4 Avgränsningar 3
1.5 Metod 3

2 Svenska pensionssystemet **5**

2.1 Allmän pension 5
2.2 Tjänstepension 6
2.2.1 Kollektivavtal 7
2.2.2 Flytträtt och avgifter 9
2.3 Privat pensionssparande 9
2.4 Fonder 10
2.4.1 Regionsfonder 10
2.4.2 Räntefonder 11
2.4.3 Blandfonder 11
2.4.4 Branschfonder 11
2.4.5 Hedgefonder 12
2.5 AP7 Såfa 12
2.5.1 AP7 Aktiefond 12
2.5.2 AP7 Räntefond 13

3 Teoretisk referensram **15**

3.1 Nyttofunktioner 15
3.2 Markowitz 18
3.2.1 Mean-Variance 18
3.2.2 Marknadsjämvikt 20
3.2.3 Capital Asset Pricing Model (CAPM) 21
3.2.4 Mean-Variance i praktiken 22
3.3 Black-Litterman 23
3.3.1 Matematiken bakom Black-Litterman 24
3.3.2 Användning av Black-Litterman 27
3.4 Optimeringsmodell Powernyttofunktion 27

3.4.1 Oberoende av förmögenheten 28
3.4.2 Hänsyn till tillgångarnas avkastning och varians 29

4 Tillvägagångsätt 31
4.1 Begränsningar 31
4.2 Övergripande beskrivning 31
4.3 Målfunktion 33
4.4 Val av tillgångar 35
4.4.1 Marknadsportfölj 36
4.4.2 Valutarisk 36
4.5 Parameterskattning 36
4.5.1 CAPM parametrarna 37
4.5.2 Black-Litterman parametrarna 37
4.5.3 Förmögenhet och framtida premieinbetalningar 41
4.6 Utbetalningsström på kapitalet 43

5 Resultat 45
5.1 Investeringsmodell 45
5.1.1 Parametrarna τ och γ 46
5.2 Utbetalningsström 48
5.3 Vidareutveckling 48

6 Appendix 51
6.1 Lagrangerelaxering av ekvation 3.11 51
6.2 Lagrangerelaxering av ekvation 3.13 52
6.3 Lagrangerelaxering av ekvation 3.16 52

Litteraturförteckning 55

Figurer

2.1 Svenska pensionssystemet. 5
2.2 Fördelning mellan AP7:s Aktie- och Räntefond. 13

3.1 Populära nyttofunktioner. 16
3.2 Mean-Variance. 21
3.3 Black-Littermans kombinerade överavkastning. 25

4.1 Processchema över tillvägagångssättet. 32

5.1 Stapeldiagrammen visar tillgångsallokeringarna och de högra graferna visar utveckling på förmögenhet under tioårsperiod för olika investeringsåldrar. Skalfaktorn $\tau \approx 0$ och $\gamma = -5$. 46
5.2 Stapeldiagrammen visar tillgångsallokeringarna och de högra graferna visar utveckling på förmögenhet under tioårsperiod för olika investeringsåldrar. Skalfaktorn $\tau \to \infty$ och $\gamma = -5$. 46
5.3 Tillgångsallokeringen för olika värden på riskaversionskoefficienten γ. Skalfaktorn $\tau \approx 0$ i samtliga grafer. 47
5.4 Kapitalutvecklingen för olika värden på skalfaktorn τ. Riskaversionskoefficienten, $\gamma = -5$ i samtliga grafer. 48
5.5 Pensionskapitalets utbetalningsström under 20 år. 49

Tabeller

2.1 Anställning och tillhörande kollektivavtal. 7
2.2 Kollektivavtal med tillhörande premieandel av lön upp till- och över 7,5 inkomstbasbelopp som kan placeras i fondförsäkring. 9
2.3 Vanliga försäkringsbolag inom fondförsäkring. 10

Kapitel 1

Introduktion

Studien bakom examensarbetet initierades av bolaget ^{fm}Försäkringsmatematik AB. Bolagets huvudinriktning är att utföra försäkringsmatematiska beräkningar och att ställa kvalificerade oberoende och av Finansinspektionen godkända aktuarier till förfogande. ^{fm}Försäkringsmatematik AB består av ett tiotal anställda och ägs av Gunnar Roos samt Stig Aggevall, där Stig Aggevall är beställaren av examensarbetet. Tanken bakom examensarbetet är att det ska ingå som en webbtjänst på en hemsida som genererar optimala investeringsförslag av fondförsäkring inom tjänstepension till privatpersoner. Hemsidan ska bland annat ge vägledning inom försäkring och oberoende jämföra olika försäkringsbolag.

1.1 Bakgrund

De flesta anställda i Sverige har tjänstepension som betalas av arbetsgivarna. Bestämmelserna kring tjänstepensionen byggs på kollektivavtal och varierar därför mycket beroende på yrke och arbetsgivare. Ifall arbetsgivaren inte skulle ingå i ett kollektivavtal kan de anställda komma överens med arbetsgivaren och få individuell tjänstepension.

Bestämmelserna i kollektivavtalen redogör om de anställdas tjänstepension är förmåns- eller premiebestämd. I en förmånsbestämd tjänstepension finns ingen möjlighet att påverka förvaltningen av pensionskapitalet. Den anställde är istället garanterad en viss procent av sin slutlön i pension. Procentenheten bestäms av kollektivavtalet. I en premiebestämd tjänstepension betalar arbetsgivaren varje månad in en premie som motsvarar en viss procent av den anställdes lön. Premieinbetalningarna förvaltas på försäkringsbolag där det finns två olika sparformer, traditionell- och fondförsäkring. I de flesta fall kan den anställde påverka sin pension genom att välja vilket försäkringsbolag som ska förvalta kapitalet och om det ska vara en traditionell- eller en fondförsäkring. Premiens storlek, valmöjligheten mellan sparformerna samt avgiften till försäkringsbolagen bestäms av kollektivavtalen.

I traditionell försäkring förvaltar bolaget det insatta kapitalet. Den anställde, förmånstagaren, är garanterad att till exempel få tillbaka det insatta kapitalet eller kapitalet med en viss procents avkastning beroende på vilket bolag som väljs. I en framgångsrik förvaltning får förmånstagaren även ta del av överskottet som försäkringsbolaget genererat, som dock inte är garanterat.

Fondförsäkring ger förmånstagaren möjligheten att själv bestämma över hur premieinbetalningarna ska förvaltas. Förmånstagaren får välja mellan ett antal olika försäkringsbolag och sedan bland de valbara fonderna i bolagen. I fondförsäkring finns inga garantier på det insatta kapitalet men genom att utsätta sig för större risker finns även möjlighet till större tillväxt.[1]

Många är inte medvetna om möjligheten att styra över sin tjänstepension. För någon som inte är intresserad eller kunnig inom området kan det även vara svårt att välja försäkringsbolag och sparandeform. Det kan vara svårt att avgöra om det valda bolaget presterar bra eller dåligt samt hur de olika avgifterna på försäkringsbolagen påverkar det slutgiltiga pensionskapitalet.

1.2 Problembeskrivning

Examensarbetet går ut på att skapa en matematisk modell som genererar optimala investeringsförslag tillämpad på fondförsäkring. Investeringsförslagen är ett alternativ till anställda med tjänstepension som vill och kan välja fondförsäkring, men som inte har kunskap om förvaltning. Eftersom modellen avser pensionsbesparing kommer investeringsförslagen att utgå ifrån en optimal riskaversiv strategi. Risken kommer även att minskas i samband med ökad pensionskapital. För att öka förståelsen för pensionsspararna kommer storleken på de årliga utbetalningarna av pensionskapitalet från pensionsberättigad ålder visas med pedagogisk grafik.
Problemet kommer att lösas genom följande delmoment:

- Undersöka investeringsslagen och dess egenskaper som finns till förfogande hos försäkringsbolag vid val av fondförsäkring.
- Skapa en optimal riskaversiv investeringsmodell anpassad till fondförsäkring.
- Jämföra investeringsförslagen mot historisk data.
- Undersöka vad kapitalet kommer att ge för utbetalningsström under förutsättningen att det ska betalas ut under bestämt antal år.

1.3 Syfte

Syftet med examensarbetet är att ta fram en optimal investeringsstrategi för fondförsäkring. Det kommer att lägga grunden till ett hjälpmedel som kommer att ge vägledning och förståelse kring det egna tjänstepensionssparandet.

1.4 Avgränsningar

Examensarbetet kommer inte att undersöka den optimala förvaltningen som en kombination av traditionell- och fondförsäkring utan kommer endast att utreda hur en investeringsstrategi kan se ut för en fondförsäkring inom tjänstepension. Arbetet kommer heller inte jämföra olika försäkringsbolag med varandra eller ta hänsyn till riskprodukter som till exempel premiebefrielse- och dödsfallsskyddsförsäkring hos de olika bolagen. Investeringsslagen kommer att vara generiska fonder och är därmed inte förvaltarspecifika. Avkastningen på tillgångarna antas vara normalfördelade. Optimeringsmodellen kommer att utgå ifrån en perfekt marknad, utan transaktionskostnader och skatter. De framtida premieinbetalningarna från arbetsgivaren antas inkomma kontinuerligt fram till pensionsålder och ha samma procentuella ökning som reallöneökningen. Under utbetalningstiden antas kapitalavkastning och kapitalskatt vara fast och låg. Ingen utdelningskostnad dras av på utbetalningen.

1.5 Metod

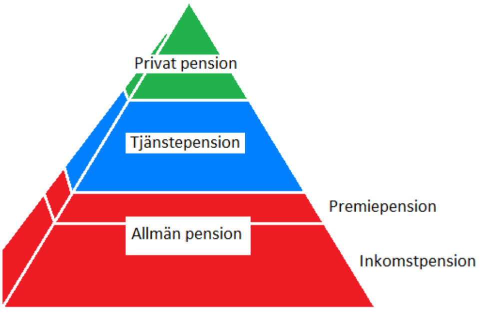
Eftersom det främsta målet med examensarbetet är att skapa en optimal investeringsstrategi för fondförsäkring introduceras examensarbetet av en utförlig beskrivning av det svenska pensionssystemet. Hur pensionssystemet är uppbyggt och vilka alternativ som pensionsspararna har vid val av fondförsäkring. Vilka tillgångsslag som finns till förfogande och storleken på kapitalet som går till tjänstepension och den berättigade storleken som kan placeras i fondförsäkring.

En introduktion till den grundläggande matematik som användas för att lösa optimeringsproblemet och tillvägagångsättet för att bygga upp modellen presenteras därefter. Optimeringsproblemet använder en powernyttofunktion. Black-Litterman modellen, som använder jämviktsläget i CAPM i kombination med subjektiva åsikter angående tillgångarnas framtida prestation implementeras som resulterar i den förväntade överavkastningen till optimeringsmodellen. De subjektiva åsikterna baseras sig på tillgångarnas historiska prestation. Historisk data på tillgångarna hämtas från Datastream och modellen programmeras i Matlab som anropar AMPL för lösning av optimeringsproblemet.

Kapitel 2

Svenska pensionssystemet

I avsnittet nedan följer en beskrivning av det svenska pensionssystemet. Avsnittets syfte är att ge klarhet och förståelse om pensionssystemets olika delar och omfattning. Pensionssystemet i Sverige är uppbyggd av tre delar; allmän pension, tjänstepension samt av ett frivilligt privat pensionssparande. Fördelningen av det totala pensionskapitalet och de tre delarna brukar beskrivas med en pyramid, se figur 2.1. Examensarbetet kommer endast undersöka investeringsstrategier av tjänstepensionsbesparing. Det betyder dock inte att strategin inte fungerar att tillämpa för privat pensionssparande och sparande av premiepension i den allmänna pensionen.



Figur 2.1. Svenska pensionssystemet.

2.1 Allmän pension

Alla som har bott och betalat skatt på inkomst i Sverige har rätt till allmän pension. Den pensionsgrundande inkomsten är förutom lön även inkomst i form av studiemedel, sjuk- och aktivitetsersättning, inkomst vid värnplikt och barnledighet. För varje skattebaserad inkomst går 18,5 procent i avgifter till den allmänna pensionen. Kravet för att inkomsten ska bli pensionsgrundande är att årsinkomsten överstiger 42,3 procent av prisbasbeloppet, då den blir pensionsgrundande från första kronan. Taket för den allmänna pensionen är 7,5 inkomstbasbelopp, vilket betyder att löneandel som överstiger 7,5 inkomstbasbelopp inte inkluderas i den allmänna pensionsrätten. År 2010 motsvarade 42,3 procent av prisbasbeloppet 17 935 kronor och 7,5 inkomstbasbelopp 383 250kr och gav en maximal pensionsrätt på 70 901 kronor.

Den allmänna pensionen består till stor del av inkomstpension som 16 av de 18,5 procentenheterna går till. De 16 procentenheterna från samtliga skattebetalare likfördelas i fyra buffertfonder som betalar ut inkomstpension till de nuvarande pensionärerna. Genom att betala avgift till inkomstpensionen erhålles en egen rätt att få inkomstpension vars storlek grundar sig på intjänad inkomst fram till pensionsålder och Sveriges ekonomi i stort.

De resterande 2,5 procentenheterna av avgiften avsätts till premiepension, där pensionsspararna själva väljer i vilka värdepappersfonder premierna ska förvaltas. Årsskiftet mellan 2010/2011 kunde pensionsspararna välja mellan 789 fonder som förvaltades av 94 olika fondbolag. Om pensionsspararen inte väljer någon fond placeras premieinbetalningen i Statens årskullsförvaltningsalternativ, AP7 Såfa som har en generationsfondsprofil. Storleken på premiepensionen beror även här på det intjänade kapitalet fram till pensionsåldern samt på förvaltningen av premien.

Slutligen består den allmänna pensionen av garantipension. Garantipension avser endast personer som bott i Sverige i 40 år från 25 års ålder och som inte arbetat eller tjänat ihop en låg pension. Det kan även tilläggas att personer födda före 1938 istället för inkomst- och premiepension har något som kallas för tilläggspension. Detta eftersom pensionssystemet baserades på andra regler än de nuvarande. Tilläggspensionens storlek grundade sig på de 15 bästa inkomståren, med minst 30 års arbete för fullständig pension. Särskilda övergångsregler gäller för personer födda mellan 1938-1958 som hamnat mellan dessa regelverk. Övergången är en proportionerlig kombination av tilläggspension och inkomst- och premiepension där tidigt födda har en större andel tilläggspension och visa versa.[16]

2.2 Tjänstepension

Samtliga företag som har medlemskap i ett arbetargivarförbund måste enligt kollektivavtal teckna försäkringar till sina anställda. Det gäller även hängavtalsföretag.[1] De kollektivavtalade försäkringarna omfattar reglerna för tjänstepension som består av ålderspension, efterlevandeskydd och sjukförsäkring. Det finns två typer av tjänstepension, förmåns- och premiebestämd.

I förmånsbestämd tjänstepension är den anställde garanterad en viss procent av

[1] Hängavtal tecknas av företag som inte är anslutna till någon arbetsgivar- eller branschorganisation men som genom avtalet kan använda sig av villkoren som finns i ett kollektivavtal.

sin slutlön i ålderspension. Det är då upp till arbetsgivaren att varje månad betala in en premie till den anställde som ska generera den bestämda pensionen.

Premiebestämd tjänstepension ger den anställde möjligheten att styra över sitt pensionssparande. Varje månad går en viss procent av den anställdes lön, en premie, till tjänstepensionsbesparing som arbetsgivaren betalar. Den anställde får i många fall välja vilket bolag som ska förvalta premieinbetalningarna samt om sparformen ska vara en traditionell- eller fondförsäkring.

I traditionell pensionsförsäkring förvaltar försäkringsbolaget premierna. Den anställde, förmånstagaren är garanterad att få en viss grundpension som varierar mellan olika försäkringsbolag. Om kapitalet förvaltas framgångsrikt får förmånstagaren ta del av överskottet.

Väljer förmånstagaren fondförsäkring förvaltar den sin ålderspension helt själv. Förmånstagaren väljer bolag och placerar premieinbetalningarna i de valbara fonderna som erbjuds. Samtliga beslut och regler kring tjänstepension finns beskrivna i de tillhörande kollektivavtalen för de anställda.[15]

2.2.1 Kollektivavtal

I tabell 2.1 kan de vanligaste kollektivavtalen skådas. För djupare kunskap om reglerna kring tjänstepension har följande avtal i tabell 2.1 undersökts. Det som ligger i intresse för examensarbetet är information om den premiebestämda tjänstepensionen. Det vill säga hur stor del av lönen som premiebetalningarna utgör samt hur stor del som tillåts placeras i fondförsäkring. Anställda inom kommunalt

Anställning	**Kollektivavtal**
Kommunalt bolag	PA-KFS
Kooperativt bolag	KTP eller KAP
Privatanställd Arbetare	SAF-LO
Privatanställd Tjänsteman	ITP
Statliganställd	PA03
Anställd hos Kommun, landsting eller kommunförbund	KAP-KL

Tabell 2.1. Anställning och tillhörande kollektivavtal.

bolag går under avtalspension PA-KFS vilket har en premiebestämd avtalspension. Premiestorleken är på 4,5 procent på inkomstlönen upp till 7,5 inkomstbasbelopp[2] och 30 procent på den resterade delen av lönen. De anställda väljer sparform och försäkringsbolag av de framtagna bolagen i avtalet.

Samtliga kooperativt anställda inom KTP har en förmånsbestämd ålderspension som grundar sig på lön och en kompletterande KTPT-del. KTPT-delen är en

[2] 7,5 inkomstbasbelopp motsvarar 2011 en årsinkomst på 390 750 kronor.

premie på strax över 2 procent av lönen som placeras i traditionell eller fondförsäkring genom val av den anställde.[8] För anställda som regleras av KAP-avtalen gäller endast en premiebestämd ålderspension. År 2011 går 4,3 procent av lönen upp till 7,5 inkomstbasbelopp till premiebetalning samt 24 procent av lönen utöver. Den anställde bestämmer själv om premien ska placeras i traditionell- eller fondförsäkring.[17]

Inom den privata arbetsmarknaden gäller två separata kollektivavtal för arbetare och tjänstemän. För arbetare som har avtalspension SAF-LO gäller en premiebestämd pensionslösning. Storleken på premieinbetalningen är 4,3 procent av lönen upp till 7,5 inkomstbasbelopp år 2011 samt 24,0 procent på lönen därutöver. De anställda bestämmer själva sparform samt försäkringsbolag av de valbara bolagen enligt kollektivavtalet.

För tjänstemän inom den privata arbetsmarknaden finns en uppdelning som beror på det år tjänstemännen är födda. ITP delas till ITP 1 och 2, där den första delen gäller tjänstemän födda 1979 och senare samt då ITP2 gäller för tjänstemän födda innan 1979. Avtalen i ITP1 reglerar en premiebestämd försäkring för ålderspension. Premiestorleken är 4,5 procent på lön upp till 7,5 inkomstbasbelopp och 30,0 procent på resterade delen av lönen. Enligt regelverk måste minst 50 procent av premien förvaltas under traditionell försäkring, tjänstemannen får möjligheten att välja sparform till den resterade delen.

Ålderspensionen i ITP2 består av en förmånsbestämdpension och av ITPK som är en kompletterande premiebestämdpension. Den premiebestämda delen är 2 procent av hela lönen och tjänstemannen väljer själv vilket försäkringsbolag och sparform det ska vara på premien. För nya företag som binder sig till ITP-avtalen tillämpas oftast ITP1 för alla tjänstemän oavsett ålder.[24]

För statligt anställda som ryms inom PA03-avtalen är ålderspensionen uppdelad i tre delar. En förmånsbestämd del, en kompletterande del där 2 procent av lönen förvaltas i en traditionell försäkring samt en individuell ålderspension på 2,5 procent på lön upp till 30 inkomstbasbelopp som den anställda själv väljer sparform över.[22]

Anställda inom landsting och kommun har en tvådelad ålderspension. En förmånsbestämd del som gäller för arbetare med en inkomst över 7,5 inkomstbasbelopp samt en avgiftsbestämd del för samtliga. I den avgiftsbestämda delen betalar arbetsgivaren 4,5 procent i premie på lön upp till 30 inkomstbasbelopp där den anställde placerar premierna i traditionell- eller i fondförsäkring.[17]

Kollektivavtalen indikerar på att fler avtal övergår till att vara eller får en kompletterade premiebestämd del i avtalspensionen. Vissa branscher inom arbetsmarknaden har utfärdat egna kollektivavtal där de anställda har större möjlighet att välja fördelningen mellan avsättning till ålderspension, ledighet och högre lön. I samtliga kollektivavtal finns möjlighet att välja om återbetalnings- och familjeskydd ska ingå. I regel placeras premierna i traditionell försäkring då de anställda aktivt inte väljer sparform. Den pensionsgrundande åldern varierar mellan 21 och 28 år i de olika kollektivavtalen.

En sammanställning av premiestorleken som tillåts placeras i fondförsäkring för de olika kollektivavtalen kan skådas i tabell 2.2.

Kollektivavtal	Lön upp till 7,5 IBB	Löneandel över 7,5 IBB
PA-KFS	4,5%	30,0%
KTP	2,1-2,25%	2,1-2,25%
KAP	4,3%	24%
SAF-LO	4,3%	24%
ITP1	2,25%	15%
ITP2	2,0%	2,0%
PA03	2,5%	2,5% (upp till 30 IBB)
KAP-KL	4,5%	4,5% (upp till 30 IBB)

Tabell 2.2. Kollektivavtal med tillhörande premieandel av lön upp till- och över 7,5 inkomstbasbelopp som kan placeras i fondförsäkring.

2.2.2 Flytträtt och avgifter

Kollektivavtalen reglerar vilka försäkringsbolag som tillåts förvalta premieinbetalningarna för tjänstepensionen samt rätten att flytta besparingen från ett bolag till ett annat. Många gånger tillåts en flytt mellan de bolag som finns valbara inom kollektivavtalet, dock inte alltid. Förnyelse av avtal har även medfört att en del pensionsbesparingar blivit låsta i försäkringsbolag som eventuellt inte presterar en framgångsrik förvaltning.

De som byter arbetsgivare ofta och som omfattas av olika kollektivavtal får sin tjänstepension utspridd då olika kollektivavtal ofta inte tillåter förvaltning i samma försäkringsbolag. Att tjänstepensionsbesparingen blir utspridd med mindre besparingar i olika försäkringar medför att de gamla besparingarna med tiden istället för att växa minskas av de fasta försäkringsavgifterna.

Problemet i det hela är att den gamla arbetsgivaren har äganderätt över försäkringen med de inbetalda premierna då arbetsgivaren står som försäkringstagare och den anställde är förmånstagare. En utredning angående flytträtt inom tjänstepensionsbesparing kommer att vara färdig i början av år 2012 och eventuellt medföra en förändring i systemet.[5]

2.3 Privat pensionssparande

Många väljer att påbörja ett privat pensionssparande då allmän pension tillsammans med tjänstepension utgör ungefär 60-65 procent av den yrkesverksamma lönen. Valet av sparform och storlek är helt valfritt. Pensionsbesparing genom fond-, traditionell försäkring eller individuellt pensionssparande hos bank ger rätt till avdragsrätt på 12 000 kronor per år i självdeklaration.[2]

Examensarbetets syfte är att utreda optimala placeringar av fondförsäkring inom tjänstepensionssparande. Det betyder dock inte att metoden inte är tillämpbar vid val av fondförsäkring inom det privata pensionssparandet.

2.4 Fonder

För att få en rimlig uppfattning av vilka investeringsslag som modellen ska omfatta undersöks fondutbudet hos de försäkringsbolag som tillåts för fondförsäkring av kollektivavtalen i tabell 2.1. Samtliga bolag har ett stort utbud av fonder med stor variation som avser fondförsäkring. Valet begränsas dock beroende på vilket kollektivavtal som gäller förmånstagaren, då alla fonder som avser fondförsäkring inte tillåts av samtliga kollektivavtal. Det kan också nämnas att det inte behöver vara samma försäkringsbolag som tillåts av kollektivavtalet då en traditionell försäkring väljs.[3]

Försäkringsbolag
AMF
Avanza Pension
Danica Pension
Folksam Lo Fondförsäkring
Handelsbanken Liv
Länsförsäkringar
Nordea Liv & Pension
SEB Trygg Liv
SPP Liv Fondförsäkring
Swedbank Försäkring

Tabell 2.3. Vanliga försäkringsbolag inom fondförsäkring.

2.4.1 Regionsfonder

Samtliga försäkringsbolag från tabell 2.3 erbjuder en stor andel aktiefonder inom olika regioner. Förutom inhemska fonder där stor del av fonden endast placerar i svenska marknadsnoterade aktier finns möjlighet att välja fonder som koncentrerar sig på aktiebolag inom andra områden. De länder och områden som fonderna fokuserar på är bland annat USA, Japan, Europa samt tillväxtmarknader som Kina, Östra Europa och Indien. Det finns även möjlighet att välja fonder som har ett innehav av större regioner som Asien, Nordamerika och Globala fonder som

[3]Informationen i samtliga nedan kommande avsnitt baserar sig på en sammanställning av alla bolags fondutbud från respektives hemsida.

investerar i aktier inom de olika världsdelarna. En del av fonderna inriktar sig även på storleksbaserade bolag som small-, mid- och large cap vilket representerar små-, medelstora- och stora bolag.

2.4.2 Räntefonder

Alla av de valbara försäkringsbolagen har minst ett par räntefonder i fondutbudet för fondförsäkring. Den övervägande delen i räntefonder består av obligationer utgivna av stat, kommuner, bostadsinstitut och företag med hög kreditvärdighet. Samtliga bolag erbjuder räntefonder som till majoriteten placerar i den svenska obligationsmarknaden, men ett flertal bolag erbjuder även räntefonder som har räntebärande värdepapper utgivna av emittenter i andra länder. I regel kan korta eller långa räntefonder väljas.

De korta räntefonderna som även kallas för likviditetsfonder eller penningmarknadsfonder har en räntebindningstid på upp till ett år och utsätter sig för låga risker.

Långa räntefonder, så kallade obligationsfonder har en genomsnittlig räntebindningstid på minst 2 och maximalt mellan 7 och 10 år. Även här är risken låg, men vid stigande räntor finns på kort sikt risk för värdeminskning.

Ett fåtal bolag erbjuder realräntefonder, en sparandeform som skyddar mot inflationsutveckling. Fonderna investerar i obligationer som genererar en säker avkastning över inflation under en lång löptid. Vid förfallotid återbetalas det nominella beloppet samt förändringen i inflationen.

2.4.3 Blandfonder

Blandfonder finns till förfogande hos samtliga bolag. Utbudet varierar mycket beroende på det tillhörande kollektivavtalet. En blandfond kan investera i andra fonder och består av både aktier och räntebärande papper. Andelen av aktier brukar ligga mellan minst 10 och max 50-70 procent men kan variera mellan de olika fonderna. Blandfonder utgör därmed större risk än räntefonder men mindre än aktiefonder.

Ett par bolag erbjuder även generationsfonder som baserar andelen av aktier och räntebärande papper på den återstående tiden till pension. Andelen aktier i fonden minskas i takt med ökande ålder. För en pensionssparare i 25 års ålder brukar mer än 95 procent av generationsfonden bestå av aktier som viktats om till ca 30 procent aktier med resterande investering i räntebärande papper vid pensionsålder.

2.4.4 Branschfonder

Utbudet på branschfonder är inte lika omfattande som regionsfonder hos försäkringsbolagen. En del bolag erbjuder ett flertal branschfonder som riktar in sig på aktiebolag inom bland annat läkemedel, IT, råvaror, guld och energi. Bolagens utbud varierar dock beroende på det specifika kollektivavtalet som försäkringstagaren tillhör.

2.4.5 Hedgefonder

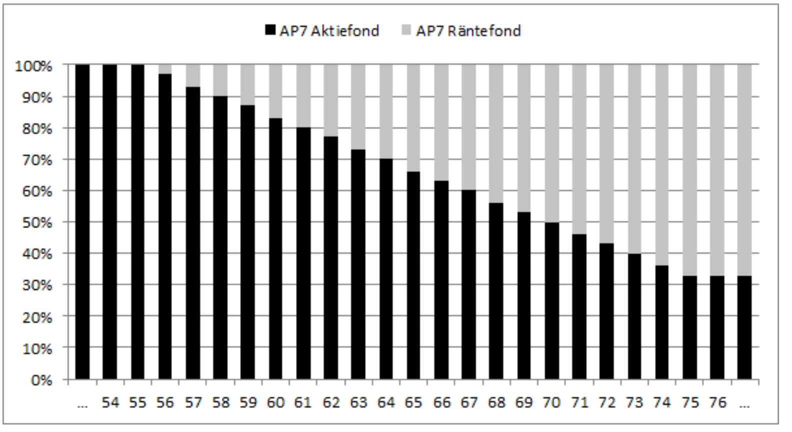
Endast få försäkringsbolag har hedgefonder i utbudet. Utbudet är även begränsat till en del av kollektivavtalen inom yrkesfördelningarna. Hedgefonder har friare regler än aktiefonder och kan använda sig av belåning, blankning och placera i olika typer av derivat för att minimera eller eliminera risken i förvaltningen. Genom att säkra sig på det sättet är tanken med hedgefonder att de alltid ska generera positiv avkastning. Det betyder dock inte att hedgefonder är en säker investering då de i flesta fall kan vara mer riskfyllda än aktiefonder.

2.5 AP7 Såfa

För att få en uppfattning av statens strategi på långsiktig pensionsbesparing undersöks hur det förvalda alternativet av premiepensionssystemet inom den allmänna pensionen ser ut. Premiepensionssystemet administreras av Pensionsmyndigheten och Sjunde AP-fonden företräder det statliga erbjudandet. Sjunde AP-fonden förvaltar två fonder, AP7 Aktiefond samt AP7 Räntefond. Genom kombination av de två fonderna erbjuds sedan 2010 sex produkter, däribland det förvalda alternativet som är statens årskullsförvaltningsalternativ, AP7 Såfa. AP7 Såfa fungerar genom att det instruerar Pensionsmyndigheten om hur premien ska viktas mellan AP7:s Aktie- och Räntefond beroende på ålder. Viktningen påminner om en generationsfond och innebär 100 procent innehav av AP7 Aktiefond fram till 55 år. Efter 55 år minskas aktieinnehavet med 3 eller 4 procent per år och andelen ersätts med AP7 Räntefond. Minskningen av aktiefonden upphör vid 75 år då 33 procent av andelen består av aktiefonden och de resterande 67 procent utgörs av räntefonden. Se figur 2.2. AP7 Såfa är avsedd för personer som inte är engagerade i sitt pensionssparande, där investeringsstrategin är att erhålla en högre avkastning genom att utsätta sig för en hög risk som trappas av efter 55 år.[19]

2.5.1 AP7 Aktiefond

Sjunde AP-fondens aktiefond är en global fond som placerar i aktier och aktierelaterade finansiella instrument. Fonden har en liten koncentrationsrisk då fonden investerar i ca 2000 olika bolag med en stor global och bransch spridning. Fondens målsättning är att generera en hög långsiktig avkastning som är högre än jämförelseindex, MSCI All Country World Index. Strategin för att uppnå hög avkastning är genom aktiv förvaltning på utvalda marknader och användandet av hävstång. Hävstången begränsas till mellan 0-70 procent av fondkapitalet och ligger i regel runt 50 procent. Genom att använda hävstång ökar förutom avkastningsmöjligheten även risken vilket tillsammans med valutarisken gör AP7 Aktiefond till en fond med hög risknivå.[20]



Figur 2.2. Fördelning mellan AP7:s Aktie- och Räntefond.

2.5.2 AP7 Räntefond

AP7 Räntefond är Sjunde AP-fondens säkra alternativ då fonden har en låg risknivå, som därefter också genererar en lägre avkastning. Fondens målsättning är att uppnå en långsiktig hög avkastning som är bättre än Handelsbankens ränteindex HMSC13. Räntefonden placerar i ränterelaterade finansiella instrument som är utgivna av den svenska staten eller andra stater med hög kreditvärdighet. Strategin för placeringarna ska ha en låg kreditrisk och till huvudsak vara utställda i svenska kronor. Den normala durationen är ca två år och får högst uppgå till tre år.[21]

Kapitel 3

Teoretisk referensram

Kapitlet presenterar den grundläggande matematik som kommer att användas för att lösa optimeringsproblemet.

3.1 Nyttofunktioner

Nyttofunktioner används för att rangordna slumpmässiga rikedomsfördelningar. En nyttofunktion, U definieras genom ett reellt värde, W som representerar investerarens förmögenhet. När funktionen är definierad rangordnas alla slumpmässiga rikedomsfördelningarna efter en utvärdering av dess förväntade nytta. Därefter väljs det alternativ som genererar den högsta nyttan.

Valet av nyttofunktioner varierar beroende på investerarens risktolerans och ekonomiska förutsättningar. En allmän begränsning för samtliga nyttofunktioner är att funktionen ska vara en kontinuerligt växande funktion. Det vill säga om $W > Y$ så ska även $U(W) > U(Y)$, men förutom den begränsningen kan nyttofunktionen i teorin ha vilken form som helst. Nedan följer populära nyttofunktioner.[10]

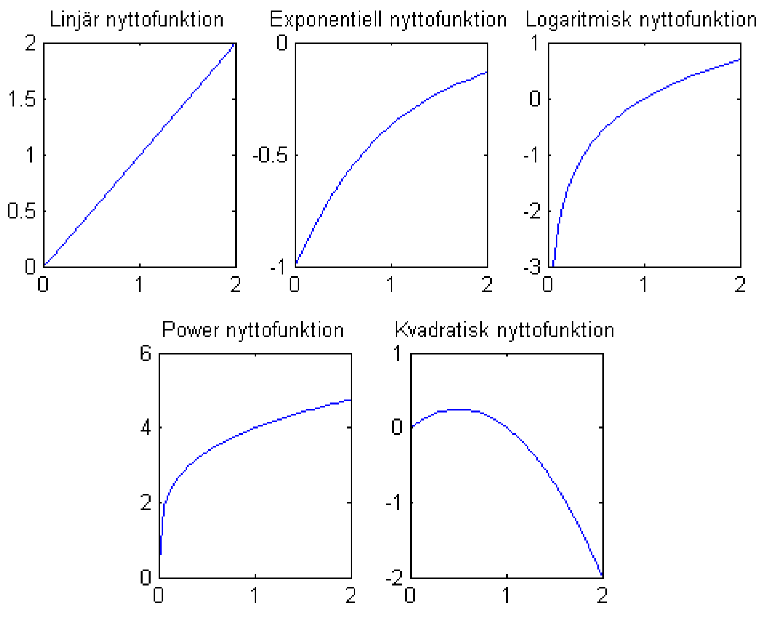
$$\texttt{Linjär} : U(W) = W \tag{3.1}$$

En linjär nyttofunktion är den enklaste formen av nyttofunktion. Funktionen rangordnar efter den förväntade förmögenheten utan att ta hänsyn till risk och är därför riskneutral.

$$\texttt{Exponentiell} : U(W) = -e^{-aW} \tag{3.2}$$

Den exponentiella nyttofunktionen har negativa värden, men eftersom det är de relativa värdena som är viktiga spelar det ingen roll. Funktionen växer mot noll då $a > 0$.

$$\texttt{Logaritmisk} : U(W) = \ln(W), \quad W > 0 \tag{3.3}$$



Figur 3.1. Populära nyttofunktioner.

Logaritmisk nyttofunktion är endast definierad för positiva värden på förmögenheten. Funktionen straffar när $W \to 0$, då $U(W) \to -\infty$. Då investeringens sannolikhetsfördelning är konstant över tiden kommer den logaritmiska nyttofunktionen i det långa loppet generera mer pengar än någon annan nyttofunktion.[10]

$$\texttt{Power} : U(W) = \frac{1}{\gamma} W^{\gamma}, \quad \gamma \leq 1, \quad \gamma \neq 0 \tag{3.4}$$

Powernyttofunktionen inkluderer den riskneutrala linjära nyttofunktionen då $\gamma = 1$ samt den logaritmiska nyttofunktionen när $\gamma \to 0$. Variablen γ är en riskaversionskoefficient som reglerar risken i investeringen.

$$\texttt{Kvadratisk} : U(W) = W - bW^2, \quad b > 0 \tag{3.5}$$

Observera att den kvadratiska nyttofunktionen endast är växande för $W < \frac{1}{2b}$ Samtliga nyttofunktioner kan ses i figur 3.1.

Den förväntade nyttan beräknas enligt

$$E\left[U\left(W\right)\right] = \sum_{i=1} p_i U\left(\omega_i\right)$$

där p_i betecknar sannolikheten att erhålla förmögenheten ω_i. Eftersom en investerare alltid föredrar en större förmögenhet jämfört med en mindre är målet för investeraren att maximera den förväntade nyttan av förmögenheten. Följaktligen blir det förväntade värdet av nyttofunktionen en naturlig målfunktion för investerare. Principen är att beräkna det förväntade värdet i alla möjliga situationer och välja det alternativ som genererar det största värdet.

$$U\left[E\left(W\right)\right]-E\left[U\left(W\right)\right] \tag{3.6}$$

Harry Markowitz definierar riskpremien som den maximala summa en individ är villig att betala för att undvika osäkerhet i form av risk. Premien betecknas som differensen mellan nyttofunktionen av den förväntade förmögenheten och den förväntade nyttan av förmögenheten, ekvation 3.6.

$$U\left[E\left(W\right)\right]-E\left[U\left(W\right)\right]=\begin{cases} >0 & \Rightarrow \text{Riskaversiv} \\ =0 & \Rightarrow \text{Riskneutral} \\ <0 & \Rightarrow \text{Risksökande} \end{cases}$$

Värdet av ekvation 3.6 visar vilken riskpreferens investeraren tillhör. Investeraren är riskaversiv när nyttofunktionen är en konkav funktion, riskneutral vid en linjär funktion och slutligen risksökande vid nyttjande av en konvex nyttofunktion.

$$ARA=-\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{3.7}$$

Den absoluta riskaversionen, ARA[1], mäter risken givet en viss förmögenhet. ARA definieras enligt funktion 3.7.

$$RRA=-W\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{3.8}$$

Den relativa riskaversionen, RRA[2] kan ses i ekvation 3.8. En konstant riskaversion innebär att den tolererade förlusten ökar proportionerligt med förmögenheten.[14]

Exempel på beräkning av riskaversionen kan ses för powernyttofunktionen i ekvation 3.4. Första och andra derivatan av powernyttofunktionen kommer nedan.

$$U'(W)=W^{\gamma-1}$$

$$U''(W)=(\gamma-1)W^{\gamma-2}$$

Den absoluta- och relativa riskaversionen kan därefter härledas.

$$ARA=-\frac{(\gamma-1)\omega^{\gamma-2}}{\omega^{\gamma-1}}=-\frac{(\gamma-1)}{\omega} \tag{3.9}$$

$$RRA=-\omega\frac{(\gamma-1)\omega^{\gamma-2}}{\omega^{\gamma-1}}=-(\gamma-1) \tag{3.10}$$

[1] **A**bsolute **R**isk **A**version
[2] **R**elative **R**isk **A**version

Från ekvation 3.9 och 3.10 går det nu att se att den absoluta riskaversionen är en positivt avtagande funktion, eftersom $\gamma \leq 1$, samt att den relativa riskaversionen är konstant. Det innebär att powernyttofunktionen i ekvation 3.4 avser riskneutrala- då $\gamma = 1$, riskaversiva- för $0 < \gamma < 1$ och slutligen något mer riskaversiva investerare för $\gamma < 0$.

3.2 Markowitz

1952 publicerade Harry Markowitz en artikel som utvecklade och ändrade konceptet av portföljteori. Istället för fokus av säkra individuella tillgångsslag fokuserade Markowitzs artikel på portföljen som en helhet. Innan dess hade väldigt lite forskning riktat sig mot den matematiska relationen inom portföljtillgångarna. Istället för effektiva marknader talades därefter om effektiva portföljer, där en effektiv portfölj definieras som en portfölj med minimal risk för en given avkastning, eller ekvivalent med, den högsta avkastningen för en given risknivå. Genom att ta hänsyn till relationen mellan tillgångarna, det vill säga kovariansen kan portföljer som genererar en högre avkastning för samma risk, eller portföljer med lägre risknivå för samma avkastning skapas. Markowitz teori bygger på att investerare skapar sina portföljer i syfte att maximera den förväntade nyttan av deras förmögenhet. Eftersom förmögenheten definieras som avkastningen av tillgångarna baseras besluten på tillgångarnas förväntade medelavkastning och avkastningens varians. Den förväntade nyttan är därmed en funktion av dessa parametrar. Tillvägagångsättet ovan beskrivs därför som Mean-Variance metoden eftersom den endast tar hänsyn till medelvärdet av avkastningen och avkastningens varians. Metoden bygger på att avkastningen antas vara normalfördelad eller att den valda nyttofunktionen är kvadratisk. [14]

3.2.1 Mean-Variance

Det grundläggande målet för portföljteori är att optimalt fördela investeringen i samtliga tillgångar. Mean-Variance modellen tar fram denna fördelning genom en avvägning mellan risk och avkastning. Modellen genererar olika portföljkombinationer för givet antal tillgångar genom att kombinera två godtyckligt optimala portföljer. Modellen används även flitigt i kombination med en riskfri tillgång. Eftersom portföljen består av en linjär kombination av riskfyllda tillgångar, uttrycks den förväntade avkastning, μ och varians, C enligt ekvationerna nedan.

$$\begin{aligned} \mu =& E[R] = \left[E\left[R_1\right] E\left[R_2\right] \ldots E\left[R_n\right]\right]^T \\ C =& E\left[\left(R - E\left[R\right]\right)\left(R - E\left[R\right]\right)^T\right] \end{aligned}$$

Där $E[R_i]$ är den förväntade avkastningen för tillgång i.

En förvaltare vill maximera den sammanlagda avkastningen av portföljtillgångarna och samtidigt minimera risken. Den optimala fördelningen av investeringskapitalet beror på den modell som väljs och som speglar förvaltarens risktolerans.

En investerare erhåller den portfölj som minimerar risken genom att lösa den enklaste modellen, ekvation 3.11, med bivillkoret som fastställer att hela andelen av kapitalet placeras i tillgångarna.

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2} x^T C x \\ \textit{då} \quad &\mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Den optimala tillgångsallokeringen, x, erhålls genom en Lagrangerelaxering och resultatet blir ekvationen nedan. Härledningen av lösningen kan ses i appendix 6.1.

$$x = x_R = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} \tag{3.12}$$

En mer riskbenägen investerare skulle istället för minimala risken föredra att hitta optimala tillgångsallokeringar för en logaritmisk nyttofunktion. Tillgångsallokeringarna skulle därmed erhållas genom lösning av ekvation 3.13, med samma bivillkor som ovan.

$$\begin{aligned} &\max \left(\mu^T x - \frac{1}{2} x^T C x \right) \\ \textit{då} \quad &\mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Även denna lösning erhålls genom Lagrangerelaxering. Lösningstillvägagångsättet kan ses i appendix 6.2.

$$x = x_T = C^{-1}(\mu - \frac{\mathbf{1}^T C^{-1}\mu - 1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}}\mathbf{1}) \tag{3.14}$$

Enligt tvåfondsteoremet kan hela effektiva fronten spännas upp med de två lösningarna, x_T och x_R . Där λ anger andelen av investeringskapitalet.

$$x(\lambda) = \lambda x_T + (1 - \lambda) x_R \tag{3.15}$$

En hyperbolformad kurva fås genom att plotta den förväntade avkastningen erhållen av $x(\lambda)$ mot volatiliteten för olika värden på λ. Den effektiva fronten utgörs av den kurva som ger maximal avkastning för olika värden på volatilitet. Se figur 3.2.

Vid tillgång till en riskfri tillgång, r_f och ett avkastningskrav på $\bar{\mu}$ erhålls vikterna genom att lösa optimeringsproblemet i ekvationen 3.16 där y är andelen investerat i den riskfria tillgången.

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2} x^T C x \\ \textit{då} \quad &\mu^T x + y r_f = \bar{\mu} \\ &\mathbf{1}^T x + y = 1 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Som tidigare erhålls lösningen genom Lagrangerelaxering och ger resultatet nedan. Appendix 6.3 visar tillvägagångsättet.

$$x(\bar{\mu}) = \frac{(\bar{\mu} - r_f)C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)}{(\mu - \mathbf{1}\mu)^T C^{-1}(\mu - \mathbf{1}\mu)} \tag{3.17}$$

Om man plottar olika värden på avkastningskravet $\bar{\mu}$ mot portföljens volatilitet erhålls den räta linjen, även kallad Capital-Market-Line som kan ses i figur 3.2. Punkten som linjen tangerar på den effektiva fronten kallas för marknadsportföljen. Marknadsportföljen fås genom att hitta det $\bar{\mu}$ och λ som ger $x(\bar{\mu}) = x(\lambda)$. Eftersom $\mathbf{1}^T x(\lambda) = 1$ gäller måste även $\mathbf{1}^T x(\bar{\mu}) = 1$ gälla. Portföljvikterna, x_M på marknadsportföljen erhålls därmed genom normering.

$$x_M = \frac{x(\bar{\mu})}{\mathbf{1}^T x(\bar{\mu})} = \frac{\dfrac{(\bar{\mu} - r_f)C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)}{(\mu - \mathbf{1}r_f)^T C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)}}{\dfrac{(\bar{\mu} - r_f)\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)}{(\mu - \mathbf{1}r_f)^T C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)}} = \frac{C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)}{\mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)} \tag{3.18}$$

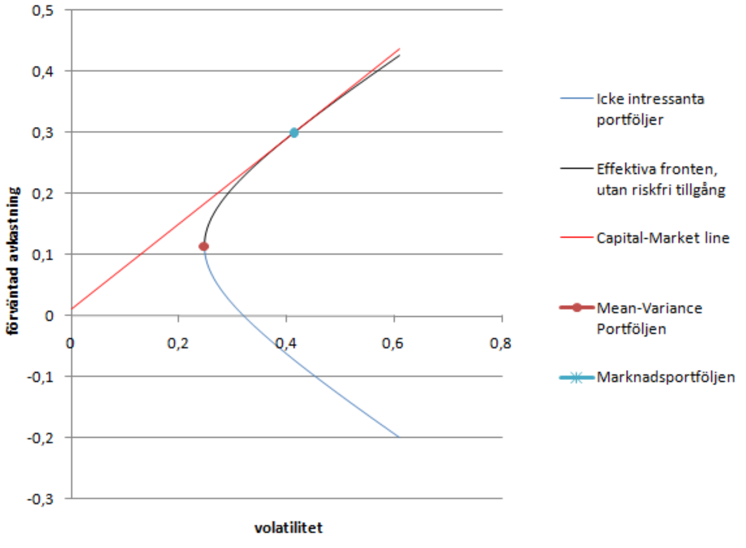
Med en riskfri tillgång förändras den ursprungliga effektiva fronten som låg på hyperbolen. Den nya effektiva fonten följer Capital-Market-Line. Avkastningen för andra portföljer, μ_P som följer Capital-Market-Line beräknas enkelt enligt beräkning av riktningskoefficienten för räta linjer, där σ representerar volatiliteten.

$$\mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P \tag{3.19}$$

I fallet då den förväntade avkastningen för Mean-Variance portföljen är mindre än den riskfria räntan är det mest gynnsamt att blanka marknadsportföljen. Om blankning inte är tillåtet är den riskfria tillgången att föredra. Mer om marknadsportföljen kan läsas under avsnittet nedan som beskriver marknadsjämviktsläget.

3.2.2 Marknadsjämvikt

Vid marknadsjämviktsläget antas en idealiserad värld där samtliga investerare använder sig av Mean-Variance optimering. Investerarna anser att samma sannolikhetsstruktur gäller för tillgångarna, det vill säga att alla är överens om tillgångarnas förväntade avkastning, varians och kovarians. Det finns en unik riskfri ränta som är tillgänglig för lån och belåning. Inga skatter eller transaktionskostnad finns. I en sådan värld kommer alla investerare att köpa en enda riskfylld fond och låna eller belåna till den riskfria räntan. Eftersom samtliga använder sig av samma statistik kommer de även välja samma riskfyllda fond. Kombinationen mellan fonden och den riskfria tillgången kommer däremot att variera hos investerarna beroende på risken de är beredda att utsätta sig för. Investerare som vill undvika risk kommer att ha en större andel av den riskfria tillgången medan aggressiva investerare väljer en större andel av den riskfyllda fonden. Eftersom samtliga använder sig av exakt samma fond, måste den fonden vara marknadsportföljen vars innehåll



Figur 3.2. Mean-Variance.

representerar samtliga tillgängliga tillgångar i marknaden. För att det ska vara i jämviktsläge är vikten av en tillgång i fonden, i marknadsportföljen, proportionell mot det totala kapitalvärdet tillgången har av hela marknadsvärdet. Dessa vikter av tillgångarna är inom finans kända som marknadsjämviktsvikterna.[10]

3.2.3 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Modellen CAPM har utvecklast från Mean-Variance genom bidrag av många matematiker. Sharpe sägs ha lagt grunden 1963 och 1964 för att senare upptäcka att Treynor tidigare självständigt utvecklat en likande modell. Med ett flertal bidrag från bland annat Mossin, Linter och Black utvecklades modellen senare till den befintliga CAPM modellen 1972.[14] Istället för att som Markowitz utgå ifrån att investerare agerar isolerat från varandra, utgår CAPM från marknadsjämviktsläget. Det medför att samma effektiva front i en kombination med den riskfria tillgången skapas. Investerarna är riskobenägna med målsättningen att maximera den förväntade nyttan i slutet på tidsperioden. De väljer den portfölj på den effektiva fronten som motsvarar deras risktolerans. Den effektiva fronten utgörs som tidigare nämnt av en linjärkombination av den riskfria tillgången och marknadsportföljen, ekvation 3.19. Marknadsportföljen består av samtliga tillgängliga tillgångar, i förhållande till deras marknadsvärde. Hänsyn till endast en investeringsperiod som är samma för samtliga tas, med en obegränsad in- och utlåning till fix ränta. Det är en perfekt marknad utan skatter och transaktionskostnader och där samtliga har tillgång till samma information. Om då marknadsportföljen är effektiv bestäms en tillgångs förväntade avkastning enligt CAPM som ekvation 3.20.

$$\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f) \tag{3.20}$$

Där β anger tillgångarnas korrelation med marknadsportföljen. Parametern r_M i ekvation 3.21 anger marknadsavkastningen.

$$\beta_i = \frac{cov(\mu_i, r_M)}{var(r_M)} \tag{3.21}$$

Investeraren får betalt för huruvida aktien samvarierar med marknadsportföljen. Om en tillgångs β-värde är noll, korrelerar inte tillgången med marknadsportföljen utan är helt oberoende. Tillgångar vars β-värde till sitt belopp är större än 1 tenderar att stiga eller falla mer än marknaden vid allmänna upp- och nedgångar och visa versa. Jämviktsvärdet i CAPM baseras på tillgångarnas bidrag till portföljrisken. β-värdet är ett mått på den systematiska marknadsrisk som uppstår på grund av tillgångens samvariation med marknadsindexet. Även en osystematisk risk som är specifik för aktien finns, som dock kan diversifieras bort.
β-värdet i ekvation 3.20 multipliceras med marknadsriskpremien, vilket anger den extra avkastning som ges av marknaden jämfört med den riskfria tillgången.

$$(\mu_M - r_f) \tag{3.22}$$

Det är generellt väldigt svårt att skatta riskpremien. Ett lång historiskt genomsnitt krävs, perioder upp mot 50 år eller längre används ofta. Indexet som det utgås ifrån måste vara brett och representera samtliga tillgångsslag.

3.2.4 Mean-Variance i praktiken

Mean-Variance modellen kan kännas väldigt lockande men i praktiken uppstår ett flertal problem med optimeringsmodellen. Litterman och Black påstår bland annat att Markowitz modell maximerar feltermer. Detta uppstår i samband med uppskattning av den förväntade avkastningen, variansen samt kovariansen för tillgångarna.

Tillgångar med förväntad hög avkastning med negativ korrelation till de andra tillgångarna i portföljen viktas väldigt hårt. Det är ett problem då det många gånger inte är tillåtet att blanka. Utan tillåten blankning föreslår modellen en hög viktning i de nämnda tillgångarna med hög avkastning och negativ korrelation, medan de övriga tillgångarna inte viktas överhuvudtaget.

Modellen är ofta instabil, då små förändringar i indata dramatisk kan förändra portföljen. Den är särskilt instabil till förändringar i förväntad avkastning. En liten förändring på en utav tillgångarna kan generera en helt annan portfölj. Instabiliteten kan bland annat bero på dåligt uppskattad kovariansmatris.[11]

3.3 Black-Litterman

Tillgångallokeringsmodellen Black-Litterman är skapad av Fischer Black och Robert Litterman. Modellen möjliggör en investeringsstrategi som kombinerar jämviktsmarknaden med taktiska åsikter angående investeringsmöjligheter. Modellen utvecklades som en lösning för de problem som uppstår vid Mean-Variance portföljoptimering. Det nämns ovan bland annat att optimering genom Mean-Variance är väldigt känslig mot små förändringar i förväntade överavkastningen vilket till exempel kan förkomma i globala obligationsportföljer i samband med förändrad växelkurs. Optimering som tar hänsyn till förändringarna resulterar i extrema allokeringsvikter i vissa tillgångar som inte är rimliga.

För att lösa problemet utgår Black-Litterman modellen ifrån marknadsjämviktsläget hos CAPM som skapar en neutral tyngdpunkt för Mean-Variance optimeringen. Den optimala portföljen kommer i det fallet bestå av marknadsjämviktsvikterna. Eftersom marknadsjämviktsvikterna inte förändras mycket med tiden kan förvaltaren genom egna synpunkter angående om hur marknaden kommer att utvecklas rikta om portföljvikterna.

Synpunkterna är subjektiva åsikter om vad olika tillgångar kommer att generera för överavkastning enskilt eller relativt varandra med en grad av säkerhet uttryckt i term av sannolikhetsfördelning. Genom att kombinera ihop synpunkterna med den förväntade överavkastningen som ges av marknadsjämvikten skapas ett nytt utgångsläge med ny förväntad överavkastning hos tillgångarna. Säkerhetsgraden hos synpunkterna avgör hur mycket den nya förväntade överavkastningen kommer att separera sig från jämviktsläget. Desto mer förtroende som ligger i synpunkterna desto längre ifrån jämviktsläget kommer portföljen att hamna.

Den förväntade överavkastningen av synpunkterna definieras i en åsiktsportfölj och synpunkternas säkerhet specificeras genom en säkerhetsmatris. Dessa parametrar används därefter tillsammans med överavkastningen av markandsjämviktsläget och dess kovarians till att beräkna den kombinerade överavkastningen. Resultatet av den kombinerade överavkastningen kan ses i ekvation 3.23.

$$\mu^* = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}q\right] \tag{3.23}$$

För förvaltarens synpunkter gäller ekvationen 3.24. Åsiktsvikterna multiplicerat med den kombinerade överavkastningen är lika med överavkastningen hos synpunkterna adderat med en felterm.

$$P\mu^* = q + \varepsilon \tag{3.24}$$

För marknadsavkastningen gäller ekvation 3.25. Den kombinerade avkastningen är lika med överavkastningen erhållen från marknadsjämvikten adderat med en felterm.

$$\mu^* = \Pi + \varepsilon^e \tag{3.25}$$

Både feltermerna antas vara normalfördelade.

$$\varepsilon \sim N(0, \Omega)$$
$$\varepsilon^e \sim N(0, \tau\Sigma)$$

Betydelsen av Black-Litterman parametrarna kan ses nedan.

$$\begin{aligned}
\mu^* &= \text{Den kombinerade överavkastningsvektorn, } \mu^* \in \mathbb{R}^{N\times 1} \\
\tau &= \text{En skalfaktor av kovariansmatrisen, } \tau \in \mathbb{R} \\
\Sigma &= \text{Kovariansmatris av marknadsöveravkastningen, } \Sigma \in \mathbb{R}^{N\times N} \\
P &= \text{Specificerar de k åsikterna i termer av vikter hos tillgångarna, } P \in \mathbb{R}^{k\times n} \\
q &= \text{Överavkastningen hos de k synpunkterna, } q \in \mathbb{R}^{k\times 1} \\
\Omega &= \text{Kovariansmatris för synpunkterna, } \Omega \in \mathbb{R}^{k\times k} \\
\Pi &= \text{Överavkastningen erhållet från marknadsjämvikten, } \Pi \in \mathbb{R}^{N\times 1}
\end{aligned}$$

Litterman är sparsam med den matematiska härledningen i beskrivningen av Black-Litterman strategin.[9] För en utförligare matematisk beskrivning kan stycket nedan betraktas som grundar sig på analyser av stategin.

3.3.1 Matematiken bakom Black-Litterman

Black-Litterman modellen beräknar överavkastning vid marknadsjämvikten genom omvänd optimering.

$$\Pi = \lambda\Sigma\omega_{mkt} \tag{3.26}$$

Riskaversionskoefficient λ beräknas enligt

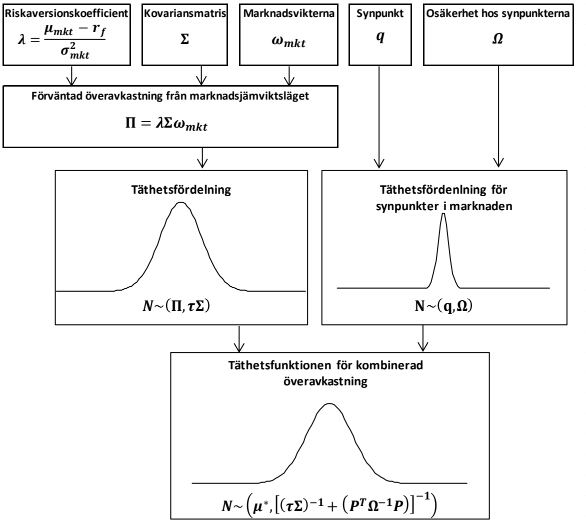
$$\lambda = \frac{\mu_{mkt} - r_f}{\sigma^2_{mkt}}. \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{mkt} &= \text{Väntevärdet på den totala marknadsavkastningen.} \\
r_f &= \text{Riskfri ränta.} \\
\sigma^2_{mkt} &= \text{Variansen på överavkastningen i marknadsportföljen.}
\end{aligned}$$

Flödesfiguren 3.3 beskiver grovt hur den kombinerade väntevärdet för överavkastningen beräknas.[6] Den matematiska strategin vid framtagning av de nya kombinerade överavkastningen hos Black-Litterman är Bayesiansk analys. Satsen som används är det Bayenska teoremet för den betingade sannolikheten enligt ekvation 3.28, där sannolikheten för B givet A beräknas.

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \mid B]P[B]}{P[A]} \tag{3.28}$$

Det som ligger i intresse för Black-Litterman strategin är väntevärdet för den kombinerade överavkastningen av marknadsportföljen, μ^*, givet överavkastningen



Figur 3.3. Black-Littermans kombinerade överavkastning.

q som avser förvaltarens synpunkter. Det som kommer att användas i Bayesianska teoremet är dess täthetsfunktion, $f_{M^*}(\mu^* \mid q)$. Ekvationen för täthetsfunktionen för de kombinerade överavkastningarna utifrån teoremet kan ses nedan.

$$f_{M^*}(\mu^* \mid q) = \frac{f_Q(q \mid \mu^*) f_{M^*}(\mu^*)}{f_Q(q)} \tag{3.29}$$

Till förfogande för uträkningen representeras förvaltarens synpunkter angående framtiden som $P\mu^*$, där multiplikationen mellan P-matrisen och de framtida överavkastningar för tillgångarna blir en $k \times 1$-vektor som antas vara normalfördelad.

$$P\mu^* \sim N(q, \Omega) \tag{3.30}$$

Även överavkastningen Π antas vara normalfördelad med väntevärde μ^* och kovariansen $\tau\Sigma$, där τ är en skalfaktor vilket har nämnts ovan.

Med kunskap om fördelningen för parametrarna kan ekvation 3.29 beräknas. I uträckningen kommer dock inte $f_Q(q)$ att delta då termen inte beror av μ^* och kommer att försvinna som en konstant.[13]

För godtyckliga variabler $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ som sägs ha multivariat normalfördelning,

$$\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, C) \tag{3.31}$$

där C är positiv definit med determinanten $\mid C \mid$ är täthetsfunktionen enligt ekvation 3.32.

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \mid C \mid^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T C^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})} \tag{3.32}$$

Täthetsfunktionen för den kombinerade förväntade överavkastningen i ekvation 3.29 utvecklas för att visa resultatet av μ^*.

$$\begin{aligned} f_{M^*}(\mu^* \mid q) &= \frac{f_Q(q \mid \mu^*) f_{M^*}(\mu^*)}{f_Q(q)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \mid \tau\Sigma \mid^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\Pi-\mu^*)^T (\tau\Sigma)^{-1} (\Pi-\mu^*)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \mid \Omega \mid^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(P\mu^*-q)^T \Omega^{-1} (P\mu^*-q)} \frac{1}{f_Q(q)} \end{aligned}$$

Låt nu:

$$f_{M^*}(\mu^* \mid q) = Ae^{-\frac{1}{2}B}$$

där

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \mid \tau\Sigma \mid^{1/2}} \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \mid \Omega \mid^{1/2}} \frac{1}{f_Q(q)} \\ B &= \left((\Pi - \mu^*)^T (\tau\Sigma)^{-1} (\Pi - \mu^*) + (P\mu^* - q)^T \Omega^{-1} (P\mu^* - q)\right). \end{aligned}$$

Den exponentiella termen B vidareutvecklas nedan.

$$\begin{aligned} B &= (-{\mu^*}^T (\tau\Sigma)^{-1} + \Pi^T (\tau\Sigma)^{-1})(\Pi - E\mu^*) + (-q^T \Omega^{-1} + (P\mu^*)^T \Omega^{-1})(P\mu^*) - q) \\ &= {\mu^*}^T (\tau\Sigma)^{-1} \mu^* - 2\Pi^T (\tau\Sigma)^{-1} \mu^* + \Pi^T (\tau\Sigma)^{-1} \Pi + \\ &\quad {\mu^*}^T P^T \Omega^{-1} P\mu^* - 2q^T \Omega^{-1} P\mu^* + q^T \Omega^{-1} q \\ &= {\mu^*}^T ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)((\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)^{-1} ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)\mu^* - \\ &\quad 2(\Pi^T (\tau\Sigma)^{-1} + q^T \Omega^{-1} P)((\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)^{-1} ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)\mu^* + \\ &\quad q^T \Omega^{-1} q + \Pi^T (\tau\Sigma)^{-1} \Pi \end{aligned}$$

Med

$$\begin{aligned} C &= (\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} q) \\ H &= (\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \\ D &= q^T \Omega^{-1} q + \Pi^T (\tau\Sigma)^{-1} \Pi \end{aligned}$$

får vi,

$$\begin{aligned} B &= {\mu^*}^T H^T H^{-1} H\mu^* - 2C^T H^{-1} H\mu^* + D \\ &= (H\mu^* - C)^T H^{-1} (H\mu^* - C) + D - C^T H^{-1} C \\ &= \left({\mu^*}^T H^T - C^T\right) H^{-1} (H\mu^* - C) + D - C^T H^{-1} C \\ &= \left(\mu^* - H^{-1} C\right)^T H \left(\mu^* - H^{-1} C\right) + D - C^T H^{-1} C. \end{aligned}$$

B insatt i täthetsekvationen ger

$$f_{M^*}(\mu^* \mid q) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\mu^*-H^{-1}C\right)^T H\left(\mu^*-H^{-1}C\right)+D-C^T H^{-1} C} \tag{3.33}$$

där A i ekvationen är en konstant term som inte beror av det stokastiska väntevärdet μ^*. Resultatet visar tydligt att täthetsfördelningen för den kombinerade överavkastningen, μ^* har en normalfördelning eftersom

$$f_{M^*}(\mu^* \mid q) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\mu^*-H^{-1}C\right)^T H\left(\mu^*-H^{-1}C\right)},$$

vilket ger nedanstående normalfördelning.

$$f_{M^*}(\mu^* \mid q) \sim N\left(H^{-1}C, H^{-1}\right) \tag{3.34}$$

Det förväntade överavkastningen givet förvaltarens synpunkt ges av

$$\mu^* = H^{-1}C = \left((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}q\right) \tag{3.35}$$

med variansen

$$Var(\mu^*) = H^{-1} = \left((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right)^{-1}. \tag{3.36}$$

3.3.2 Användning av Black-Litterman

Den förväntade överavkastningen kommer att modelleras genom Black-Litterman. Modellen har rekommenderats av min handledare Jörgen Blomvall som har en stor erfarenhet inom finansiell- och matematiskoptimering.

Tyvärr har vi inte lyckats hitta information om hur Black-Litterman modellen fungerar i praktiken. Däribland inte heller om hur modellen presterar samt vilka svårigheter som uppstår i samband med tillämpningen. Det som framkommer i artiklar kring tolkningen av Black-Litterman är svårigheten att bestämma skalfaktorn τ samt säkerheten i de olika synpunkterna, då informationen om hur de ska sättas inte är fullständig.

Tanken med Black-Litterman modellen i examensarbetet är att sätta synpunkterna angående överavkastningen utifrån historisk data. Litterman nämner kort att synpunkter angående den förväntade överavkastningen skulle kunna hämtas genom en funktion av historisk data där säkerheten sätts efter mängden data som stödjer åsikten. Korrelationen mellan avkastningen skulle i det fallet kunna vara den historiska korrelationen mellan tillgångarna.[9]

3.4 Optimeringsmodell Powernyttofunktion

En optimeringsmodell som bygger på powernyttofunktion genererar riskaversiva investeringar. Den relativa risken styrs med riskaversionskoefficienten γ och minskar även med ökad förmögenhet, se figur 3.1. För en pensionssparare som vill betrygga sin framtida pension är det därmed passande att utgå med en powernyttofunktion i optimeringsmodellen.

3.4.1 Oberoende av förmögenheten

Antag att en investerare använder sig av en powernyttofunktion med en riskaversionskoefficient, γ sådan att $\gamma < 1$. Investeraren har en positiv initial förmögenhet, $W > 0$ och ska vikta tillgångarna med allokeringsvikterna $\omega \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ med ett bivillkor som fastställer att hela kapitalet placeras i tillgångarna, där den totala investeringen i varje tillgång blir $W\omega$. Givet att den slumpmässiga avkastningen på tillgångarna är $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N\times 1}$, beräknas det slumpmässiga portföljkapitalet enligt $\mathbf{W} = W(1+\mathbf{R}^T\omega)$. Investeraren kan då lösa ett optimeringsproblem som är helt oberoende av investerarens förmögenhet, där U_P står för en powernyttofunktion.

$$\begin{aligned} \max E\left[U_P\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)\right] \\ \mathbf{1}^T\omega = 1 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Lösningen ger den optimala allokeringen $\hat{\omega}$, där den optimala investeringen då blir $W\hat{\omega}$.

Bevis för teoermet härleds nedan. En förvaltare som utnyttjar en powernyttofunktion och har en positiv initial förmögenhet $W > 0$ bör maximera

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[U_P\left(\mathbf{W}\right)\right] = \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[U_P\left(W(1+\mathbf{R}^T\omega)\right)\right] \tag{3.38}$$

som är ekvivalent med

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[U_P\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)\right]. \tag{3.39}$$

Eftersom $\gamma < 1$ och $\gamma \neq 0$ kan funktionen skrivas om till nedanstående ekvation.

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\frac{\left(W\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)\right)^\gamma}{\gamma}\right] = \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} W^\gamma E\left[\frac{\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)^\gamma}{\gamma}\right] \tag{3.40}$$

Den positiva förmögenheten, $W^\gamma > 0$ medför att resultatet av ekvation 3.40 är ekvivalent ekvation 3.41.

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\frac{\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)^\gamma}{\gamma}\right] \tag{3.41}$$

Om $W = 0$ och $0 < \gamma < 1$ följer det såvida det inte finns arbitrage att $\mathbf{W} \equiv 0$.

Då $\gamma = 0$ går nyttofunktionen över till en logaritmisk nyttofunktion.

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\ln\left(W\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)\right)\right] \overset{W\geq 0}{=} \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} \ln W + E\left[\ln\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\ln\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)\right]$$

Om $\gamma = 1$ och de förväntade avkastningen skiljer sig för något av tillgångarna, *i,j*, sådan att,

$$E[\mathbf{R}_i] \neq E[\mathbf{R}_j],$$

skulle den riskneutrala investeraren göra en oändlig investering i portföljen och investeringen skulle vara oberoende av det initiala kapitalet. Om däremot samtliga förväntade avkastningar var lika mellan tillgångarna,

$$E[\mathbf{R}_i] = E[\mathbf{R}_j],$$

blir målfunktionen en konstant och alla lösningar av ω är optimala. Fallet då $\gamma = 1$ exkluderas därmed från teoremet i ekvation 3.37.

3.4.2 Hänsyn till tillgångarnas avkastning och varians

Under förutsättningen att avkastningen är studerat för en kort tidshorisont, sådan att $\mathbf{R} \approx 0$ och att avkastningen över tiden är oberoende ($\mu \sim t, \sigma \sim \sqrt{t}$) gäller ekvation 3.42. Det är alltså då approximativt lika med att lösa ett problem som endast beror på tillgångarnas- förväntade avkastning och kovarians.

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[U_P\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)\right] \approx \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} \mu^T\omega + \frac{\gamma-1}{2}\mu^T C\mu \tag{3.42}$$

Beviset kommer att härledas genom att studera det ekvivalenta problemet till ekvation 3.38.

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\frac{\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)^\gamma}{\gamma}\right] \Leftrightarrow \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\frac{\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)^\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\right] \tag{3.43}$$

Eftersom $\mathbf{R} \approx 0$ och tillgångsallokeringarna, ω, är relativt små kan en andra gradens taylorutveckling av målfunktionen i ekvation 3.43 implementeras. Men först en påminnelse av Taylor serien.

Taylorutvecklingen konvergerar då x befinner sig inom intervallet $-1 < x < 1$.

$$\texttt{Taylor serien}: (1+x)^\gamma = 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}x^2 + \ldots + \binom{\gamma}{i}x^i + \ldots \tag{3.44}$$

Målfunktionens andraordningens taylorutveckling följer nedan.

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\frac{\left(1+\mathbf{R}^T\omega\right)^\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\right] \approx \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\frac{1+\gamma\mathbf{R}^T\omega + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\left(\mathbf{R}^T\omega\right)^2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\right] =$$

$$= \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} E\left[\mathbf{R}^T\omega + \frac{\gamma-1}{2}\omega^T\mathbf{R}\mathbf{R}^T\omega\right] = \max_{\mathbf{1}^T\omega=1} \underbrace{\mu^T\omega}_{\sim t} + \frac{\gamma-1}{2}\underbrace{\omega^T C\omega}_{\sim t} + \frac{\gamma-1}{2}\underbrace{\omega^T\mu^T\mu\omega}_{\sim t^2}$$

Eftersom $t \approx 0$ blir målfunktionen approximativt

$$\max_{\mathbf{1}^T\omega=1} \mu^T\omega + \frac{\gamma-1}{2}\omega^T C\omega. \tag{3.45}$$

Kapitel 4

Tillvägagångsätt

Kapitlet nedan beskriver hur studien ska genomföras genom implementering av matematiken från föregående avsnitt. Processchemat i figur 4.1 skildrar lösningsförfarandet mellan de olika momenten i arbetsgången.

4.1 Begränsningar

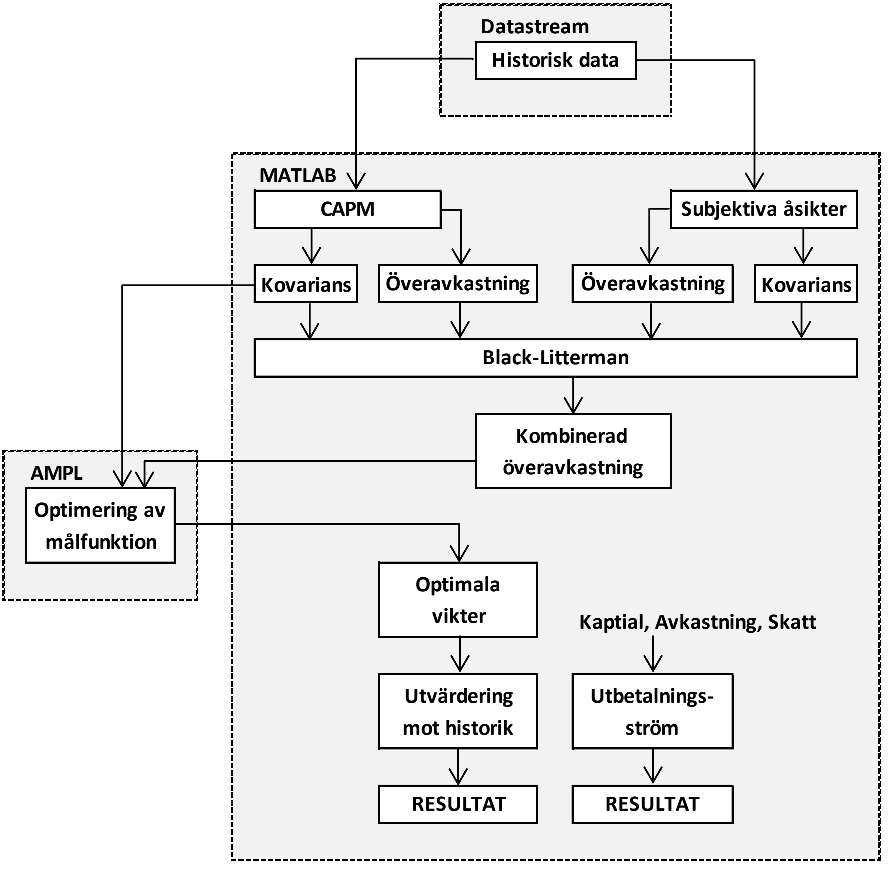
För att hålla sig inom tidsramen av examensarbetet görs en del begränsningar. Vid framtagande av optimala tillgångsallokeringar antas samtliga tillgångarnas avkastning vara normalfördelade. Det stämmer självklart inte då en normalfördelning inte tar hänsyn till sällsynta och plötsligt stora förändringar. Under längre tidsperioder kan normalfördelad avkastning approximativt stämma. Bortsett från ej tillåtet negativt innehav finns ett antagande om en perfekt kapitalmarknad vilket innebär att alla har tillgång till marknaden. Alla aktörer är små och det råder en perfekt konkurrens. All information är fritt tillgänglig och inga transaktionskostnader, skatter eller myndighetsrestriktioner för handel finns. Samtliga investerare tar beslut för en period i taget och har samma planeringshorisont. Nyttofunktionerna beror endast på förväntade värden och varians, vilket alla investerare är överens om.

Premieinbetalningarna till tjänstepension av arbetsgivaren antas vara samma andel av lönen, där samtliga antas ha samma årliga reallöneökning som tillkommer kontinuerligt fram till pensionsålder. Ingen optimal förvaltning undersöks för utbetalningsperioden av kapitalet. Vid undersökning av utbetalningsströmmen antas istället en fast årlig nominell avkastning och skatt av kapitalet under utbetalningsåren.

4.2 Övergripande beskrivning

Historisk data på samtliga tillgångsslag kommer att hämtas från Thomson Reuters Datastream för att bearbetas i Matlab. Där Thomson Reuters Datastream är världens största finansiella statistiska databas[27] och Matlab är ett programmeringsprogram för matematiska- och tekniska beräkningar. De historiska data på tillgångarna kommer att användas för att erhålla de kombinerade överavkastningarna genom Black-Litterman modellen från marknadsjämviktsläget och de subjektiva åsikterna. Dock kommer en del data närmast tiden att sparas för att senare användas vid utvärdering av resultatet. Överavkastningen från Black-Litterman modellen kommer tillsammans med tillgångarnas kovarians skickas in i APML. AMPL är ett matematiskt programmeringsspråk som klarar av att lösa optimeringsproblem med stora mänger bivillkor och variabler. De optimala vikterna för målfunktionen skickas tillbaka till Matlab där de utvärderas mot de data som inte användes vid framtagning av överavkastningen.

En enskild enklare uppskattning på utbetalningsströmmen av det besparade pensionskapitalet kommer att implementeras genom hänsyn till kapitalstorleken, en fast årlig avkastning och skatt. Se figur 4.1 för förtydligande.



Figur 4.1. Processchema över tillvägagångssättet.

4.3 Målfunktion

Målfunktionen i optimeringsmodellen kommer att modelleras i en powernyttofunktion. Funktionen kan kontrolleras av riskaversionskoefficienten γ, för att säkerställa att investeringen inte blir allt för riskfylld. Den strategi som generationsfonder och även statens årskullsförvaltningsalternativ Såfa använder kommer att tillämpas i optimeringen vilket innebär att risken minskas med tiden fram till pensionsålder. Detta kommer att kontrolleras genom variabeln I som är en uppskattning av de framtida premieinbetalningarna från arbetsgivaren diskonterat till ett nutidsvärde. En förutsättning för modellen är att pensionsspararen själv under hela arbetslivet betalar premierna till sparandet, eller får tjänstepension från arbetsgivaren i en kontinuerlig form fram till pensionsålder. Optimeringsmodellen kommer att vara oberoende av förmögenheten vilket ger ekvation 3.45 som målfunktion. Eftersom det även finns möjlighet att investera i riskfria tillgångar kommer den riskfria räntan att läggas till i modellen.
Tabellen nedan omfattar betydelsen av målfunktionens variabler.

Variabler

$$
\begin{aligned}
W &= \text{Den faktiska förmögenheten, } W \in \mathbb{R} \\
I &= \text{Framtida premieinbetalningar diskonterat till nuvärde, } I \in \mathbb{R} \\
P &= \text{Priset på tillgångarna, } P \in \mathbb{R}^{N\times 1} \\
\bar{W} &= \text{Den implicita förmögenheten, } \bar{W} \in \mathbb{R} \\
x &= \text{Antalet aktier i samtliga tillgångar, } x \in \mathbb{R}^{N\times 1} \\
\bar{x} &= \text{Implicita antalet aktier i samtliga tillgångar, } \bar{x} \in \mathbb{R}^{N\times 1} \\
u &= \text{Summan investerat i riskfri tillgång, } u \in \mathbb{R} \\
\bar{u} &= \text{Implicita summan investerat i riskfri tillgång, } \bar{u} \in \mathbb{R} \\
\bar{w} &= \text{Implicita andelen i de riskfyllda tillgångarna, } \bar{w} \in \mathbb{R}^{N\times 1} \\
\bar{y} &= \text{Implicita andelen i den riskfria tillgången, } \bar{y} \in \mathbb{R} \\
\mu &= \text{Den förväntade avkastningen från tillgångarna, } \mu \in \mathbb{R}^{N\times 1} \\
r_f &= \text{Avkastningen erhållen från den riskfria räntan, } r_f \in \mathbb{R} \\
C &= \text{Kovariansen på tillgångarnas avkastning, } \mu \in \mathbb{R}^{N\times N}
\end{aligned}
$$

Sökt

$$
\begin{aligned}
w &= \text{Andel investerat i de riskfyllda tillgångarna, } w \in \mathbb{R}^{N\times 1} \\
y &= \text{Andel investerat i riskfri tillgång, } y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Målfunktionen erhållen genom ekvation 3.45, med de insatta variablerna resulterar i nedanstående ekvation.

$$
\max \mu^T \bar{\omega} + \bar{y} r_f + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{\omega}^T C \bar{\omega} \tag{4.1}
$$

Med följande bivillkor.

$$\bar{W} = W + I \tag{4.2}$$
$$W = u + P^T x \tag{4.3}$$
$$w = \frac{diag(P)x}{W} \tag{4.4}$$
$$\bar{w} = \frac{diag(P)\bar{x}}{\bar{W}} \tag{4.5}$$
$$y = \frac{u}{W} \tag{4.6}$$
$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{\bar{W}} \tag{4.7}$$
$$w \geq 0 \tag{4.8}$$
$$y \geq 0 \tag{4.9}$$

Det implicita antalet aktier i tillgångarna är jämställt med det faktiska antalet aktier i tillgångarna. Den implicita summan investerat i riskfri tillgång är jämställt med summan av det sanna värdet investerat i riskfri tillgång och de diskonterade framtida inbetalningarna. Se ekvationerna 4.10 och 4.11.

$$\bar{x} = x \tag{4.10}$$
$$\bar{u} = u + I \tag{4.11}$$

Bivillkoren ovan ger,

$$w \overset{(4.4)}{=} \frac{diag(P)x}{W} \overset{(4.10)}{=} \frac{diag(P)\bar{x}}{W} \overset{(4.5)}{=} \frac{diag(P)(diag(P))^{-1}\bar{w}\bar{W}}{W} = \frac{\bar{w}\bar{W}}{W} \overset{(4.8)}{\geq} 0 \Leftrightarrow$$
$$\bar{w} \geq \frac{0 * W}{\bar{W}} = 0$$
$$y \overset{(4.6)}{=} \frac{u}{W} \overset{(4.11)}{=} \frac{\bar{u} - I}{W} \overset{(4.7)}{=} \frac{\bar{y}\bar{W} - I}{W} \overset{(4.9)}{\geq} 0 \Leftrightarrow \bar{y} \geq \frac{W * 0 + I}{\bar{W}} \overset{(4.2)}{=} \frac{I}{W + I}$$

villkoren för de implicita andelen på tillgångarna och den riskfria tillgången.

$$\bar{w} \geq 0 \tag{4.12}$$
$$\bar{y} \geq \frac{I}{W + I} \tag{4.13}$$

Optimeringsmodellen i ekvation 4.1 genererar allokeringarna $\bar{\omega}$ och $\bar{y}$, de implicita andelarna i de riskfyllda och den riskfria tillgången. Målfunktionen skrivs därför om för att optimera över de faktiska allokeringarna av tillgångarna.

$$
\begin{aligned}
&\max \mu^T \bar{\omega} + \bar{y} r_f + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{\omega}^T C \bar{\omega} \\
&|\omega W \overset{(4.4)}{=} \tfrac{diag(P)x}{W} W = diag(P)x \overset{(4.10)}{=} diag(P)\bar{x} \overset{(4.5)}{=} \bar{\omega}\bar{W} \Leftrightarrow \bar{\omega} = \tfrac{\omega W}{\bar{W}}| \\
&|\bar{y}\bar{W} \overset{(4.7)}{=} \tfrac{\bar{u}}{\bar{W}}\bar{W} = \bar{u} \overset{(4.11)}{=} u + I \overset{(4.6)}{=} yW + I \Leftrightarrow \bar{y} = \tfrac{yW+I}{\bar{W}}| \\
=&\max \mu^T \omega \frac{W}{\bar{W}} + r_f \left(\frac{yW + I}{\bar{W}}\right) + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{\omega W}{\bar{W}}\right)^T C \left(\frac{\omega W}{\bar{W}}\right) && (4.14) \\
&|\tfrac{W}{\bar{W}} \, \textit{är en skalär}|, \ |\bar{W} = W + I| \\
=&\max \mu^T \omega \left(\frac{W}{W + I}\right) + r_f \left(\frac{yW + I}{W + I}\right) + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{W}{W + I}\right)^2 \omega^T C \omega && (4.15) \\
&|\textit{dividerar täljare och nämnare med } W| \\
=&\max \mu^T \omega \left(\frac{1}{1 + \frac{I}{W}}\right) + r_f \left(\frac{y + \frac{I}{W}}{1 + \frac{I}{W}}\right) + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{I}{W}}\right)^2 \omega^T C \omega && (4.16)
\end{aligned}
$$

Det slutgiltiga utseendet på målfunktionen blir då följande:

$$
\begin{aligned}
&\max \mu^T \omega \left(\frac{1}{1 + \frac{I}{W}}\right) + r_f \left(\frac{y + \frac{I}{W}}{1 + \frac{I}{W}}\right) + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{I}{W}}\right)^2 \omega^T C \omega \\
&\textit{då} \qquad \omega \geq 0 \\
&\qquad\qquad y \geq 0 \\
&\qquad\qquad \mathbf{1}^T \omega + y = 1
\end{aligned}
$$

4.4 Val av tillgångar

Investeringsslagen som valts baseras på de tillgångar som finns tillgängliga hos försäkringsbolag vid val av fondförsäkring. De valda aktietillgångarna är inga förvaltarspecifika fonder utan generiska fonder som symboliserar de valbara alternativen. Säkrare investering symboliseras av ett svenskt obligationsindex med durationstiden sju till tio år och en helt riskfri tillgång. Eftersom historisk data av tillgångarna behövs för att skatta parametrarna till optimeringsmodellen och för att kunna utvärdera modellens prestation hämtas daglig data sedan januari 1989 för de valda tillgångarna från Thomson Reuters Datastream. Följande indexfonder för aktier från MSCI [1] har valts:

- MSCI AC AMERICAS
- MSCI AC EUROPÉ

[1] MSCI är en erkänd leverantör av verktyg som stöd för investeringsbeslut, bland annat indexfonder.

- MSCI SWEDEN
- MSCI JAPAN
- MSCI EM

Obligationsindexet och den riskfria tillgången ges av:

- SD TRACKER 7-10 YRS DS GOVT. INDEX
- STIBOR 1Y

Obligationsindexet består av svenska statsobligationer och statskuldväxlar. Indexet har genererats genom att 20 av de högst värderade obligationerna i fallande marknadsvärde har valts till sådan att minst 25 procent av det totala marknadsvärdet av svenska statsobligationer har inkluderats. Om detta inte infriats adderas ytterligare obligationer tills minst 50 procent av marknadsvärdet har innefattats. [4] Som riskfri tillgång valdes den ettåriga STIBOR räntan som referens. STIBOR står för **Stockholm Interbank Offerd Rate** och är ett genomsnitt av räntorna som bankerna ställt ut, med undantag för hösta och lägsta notering. [12]

4.4.1 Marknadsportfölj

Uppsättningen av marknadsportföljen är som tidigare nämnt samtliga tillgängliga tillgångar i marknaden. Vid jämviktsläget är portföljen viktat till sådan att den är proportionell till tillgångarnas kapitalvärde. Marknadsportföljen som kommer att användas i optimeringen kommer därmed vara en kombination av **MSCI All Country World**, vilket är en indexfond bestående av aktier från både tillväxt- och utvecklingsmarknader samt den obligationsfond som valts som den valbara tillgången i modellen. Enligt min handledare Jörgen Blomvall har aktier och obligationer lika mycket marknadskapitalisering vilket ger att den kombinerade marknadsportföljen skapas genom att vikta avkastningen av aktieindexet lika mycket som obligationsindexet.

4.4.2 Valutarisk

I samband med handel av utländska aktiefonder utställd i en annan valuta än den inhemska uppstår en valutarisk. Risken innebär att avkastningen av investeringen minskar eller elimineras på grund av en ändring i växelkursen mellan de olika valutorna. För att ta hänsyn till denna risk konverteras tillgångarnas aktievärde till SEK genom att multipliceras med den historiska växelkursen. De utländska fondernas avkastning kommer därmed indirekt inkludera förändringar i växelkursen.

4.5 Parameterskattning

Samtliga parametrar till optimeringsmodellen kommer att skattas så att de uppfyller villkoren för de matematiska metoder som tillämpas. En del parametrar kommer att utgå som variabler för att justeras efter bästa prestation av modellen.

Riskaversionskoefficienten, γ kommer tillsammans med τ regleras efter viktningen av tillgångarna. I den slutgiltiga produkten kommer investeraren ha möjlighet att reglera γ efter sin egen riskpreferens. Även riskpremien kommer utgå som en variabel.

4.5.1 CAPM parametrarna

Den förväntade avkastningen som ges av marknadsjämvikten beräknas enligt ekvation 3.20 där riskpremien, $(\mu_M - r_f)$, kommer att utgå som en variabel. Det är svårt att uppskatta riskpremien eftersom det krävs väldigt lång historiskt data vilket inte finns tillgänglit för de tillgångar som bygger upp marknadsportföljen. Externa undersökningar på riskpremien för den svenska aktiemarknaden 2011 visar ett värde på 4,5 procent. [18] Värdet på 4,5 procent kan anses vara lågt, då det inte är ovanligt att riskpremien i normala fall ligger runt 8 procent. I examensarbetets undersökning sätts riskpremien till det ännu lägre värdet på 4 procent. Detta eftersom säkrare investeringar prioriteras i en långsiktig pensionsbesparing. Tillgångarnas korrelation med marknadsportföljen, β ges av ekvation 3.21.

4.5.2 Black-Litterman parametrarna

Ingen enskild förvaltare kommer att tillgodoge sina åsikter angående tillgångarnas framtida prestation i det slutgiltiga optimeringsverktyget utan parametrarna i Black-Litterman kommer att basera sig på historisk data. Hur de olika parametrarna bestäms följer i nedankommande avsnitten.

Subjektiv överavkastning

Vid ett antagande att tillgångsslagen är sekvenser av oberoende och identiskt fördelade slumpmässiga variabler, $\mathbf{r}_{t,i}$, där $t = 1, \ldots, m$, med väntevärde μ_i och standardavvikelsen σ_i beräknas medelvärdet genom ekvation 4.17.

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} \mathbf{r}_{t,i} \tag{4.17}$$

Medelvärdet, $\bar{\mathbf{r}}_i$, är i sin tur en slumpmässig variabel med väntevärdet $E[\bar{\mathbf{r}}_i] = \mu_i$ och variansen $Var(\bar{\mathbf{r}}_i) = \frac{1}{m}\sigma_i^2$. Ekvation 4.18 visar argumentet för att medelvärdet är en objektiv uppskattning av μ_i.

$$E[\bar{\mathbf{r}}_i] = E\left[\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} \mathbf{r}_{t,i}\right] = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} E[\mathbf{r}_{t,i}] = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} \mu_i = \mu_i \tag{4.18}$$

Variansen av medelvärdet $\bar{r}_i$, sker enligt beräkningen i ekvation 4.19.

$$\begin{aligned} Var\left(\bar{\mathbf{r}}_i\right) &= E\left[\left(\bar{\mathbf{r}}_i - E\left[\bar{\mathbf{r}}_i\right]\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\mathbf{r}_{t,i} - \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}E\left[\mathbf{r}_{t,i}\right]\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{m^2}E\left[\left(\sum_{t=1}^{m}\left(\mathbf{r}_{t,i} - E\left[\mathbf{r}_{t,i}\right]\right)\right)^2\right] \overset{i.i.d.}{=} \frac{1}{m^2}E\left[\sum_{t=1}^{m}\left(\mathbf{r}_{t,i} - E\left[\mathbf{r}_{t,i}\right]\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{m^2}\sum_{t=1}^{m}E\left[\left(\mathbf{r}_{t,i} - E\left[\mathbf{r}_{t,i}\right]\right)^2\right] = \frac{1}{m^2}\sum_{t=1}^{m}\sigma_i^2 = \frac{1}{m}\sigma_i^2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Om den logaritmiska dagliga avkastningen är oberoende och identiskt normalfördelad,

$$\mathbf{r}_{t,i}^d \sim N\left(\bar{\mu}_i \Delta t, \bar{\sigma}_i \sqrt{\Delta t}\right) \qquad t = 1, ..., m, \tag{4.20}$$

där m är en multipel av p (m/p är ett heltal), beräknas den förväntade dagliga avkastningen till

$$E[\bar{\mathbf{r}}_i^d] = \bar{\mu}_i \Delta t \tag{4.21}$$

med variansen

$$Var[\bar{\mathbf{r}}_i^d] = \frac{1}{m}\left(\bar{\sigma}_i \sqrt{\Delta t}\right)^2 = \frac{1}{m}\bar{\sigma}_i^2 \Delta t. \tag{4.22}$$

Givet realisering av den dagliga logaritmiska avkastningen $r_{t,i}^d$, där $t = 1, \ldots, m$ och den uppskattade förväntade logaritmiska avkastningen

$$\bar{r}_i^d = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} r_{t,i}^d$$

blir värdet av den sanna förväntade logaritmiska avkastningen med konfidensgrad α inom följande intervall,

$$\bar{r}_i^d - N^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{m}\bar{\sigma}_i^2 \Delta t} \leq \bar{\mu}_i \Delta t \leq \bar{r}_i^d + N^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{m}\bar{\sigma}_i^2 \Delta t}$$

som är ekvivalent med ekvation 4.23.

$$\frac{\bar{r}_i^d}{\Delta t} - N^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{m\Delta t}}\bar{\sigma}_i \leq \bar{\mu}_i \leq \frac{\bar{r}_i^d}{\Delta t} + N^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{m\Delta t}}\bar{\sigma}_i \tag{4.23}$$

För den logaritmiska avkastningen över p dagar gäller istället nedanstående normalfördelning.

$$\mathbf{r}_{\tau,i}^p = \sum_{t=(\tau-1)p+1}^{\tau p} \mathbf{r}_{t,i}^d \Rightarrow \mathbf{r}_{\tau,i}^p \sim N\left(\bar{\mu}_i p \Delta t, \bar{\sigma}_i \sqrt{p\Delta t}\right) \qquad \tau = 1, ..., \frac{m}{p}$$

Den förväntade medelavkastningen och variansen för de p dagarna blir därmed,

$$E\left[\bar{\mathbf{r}}_i^p\right] = \bar{\mu}_i p \Delta t$$

$$Var\left(\bar{\mathbf{r}}_i^p\right) = \frac{p}{m}\left(\bar{\sigma}_i\sqrt{p\Delta t}\right)^2 = \frac{p^2}{m}\bar{\sigma}_i^2\Delta t.$$

En realisering av den sammansatta logaritmiska avkastningen över de p dagar ger,

$$r_{\tau,i}^p = \sum_{t=(\tau-1)p+1}^{\tau p} r_{t,i}^d, \qquad \tau = 1, ..., \frac{m}{p} \tag{4.24}$$

samt den uppskattade förväntade logaritmiska avkastningen, enligt

$$\bar{r}_i^p = \frac{p}{m}\sum_{\tau=1}^{\frac{m}{p}} r_{t,i}^p = p\bar{r}_i^d. \tag{4.25}$$

Den riktiga förväntade logaritmiska avkastningen med konfidensgraden α hamnar därmed inom intervallet,

$$\bar{r}_i^p - N^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{p^2}{m}\bar{\sigma}_i^2\Delta t} \leq \bar{\mu}_i p\Delta t \leq \bar{r}_i^p + N^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{p^2}{m}\bar{\sigma}_i^2\Delta t}$$

som även den är ekvivalent med intervallet som avser beräkning med dagliga avkastningar i ekvation 4.23. Det kan följaktligen konstateras att kvaliteten på en uppskattad historisk avkastning är oberoende av om daglig, veckovis, månatlig eller årlig avkastning används.

Den förväntade avkastningens kvalité är dessutom oberoende av frekvensen historisk data som används då dess standardavvikelse är volatiliteten av kapitalet dividerat med roten ur antalet år av historisk data, ($\sqrt{m\Delta t}$).

Om volatilitet på avkastningen av det egna kapitalet till exempel är 20 procent, och den förväntade avkastningen ska uppskattas med en precision på $\pm 0,5$ procentenheter med 95 procent konfidensintervall ($N^{-1}(0.975) = 1.96$), skulle det annars krävas

$$0.005 = 1.96\frac{0.2}{\sqrt{T}} \Leftrightarrow T = \left(1.96\frac{0.2}{0.005}\right)^2 \approx 6146 \text{ år}(!)$$

data.

Kovarians

Kovariansmatrisen för de subjektiva synpunkterna tecknas med Ω. När synpunkterna angående den förväntade överavkastningen kommer från en förvaltares åsikter är synpunkterna ofta oberoende av varandra, vilket gör att kovariansmatrisen brukar beskrivas av en diagonalmatris. Eftersom de subjektiva åsikterna av överavkastningen i examensarbetet kommer erhållas från historisk data kommer tillgångarna ha en kovarians. Genom att utnyttja variansen för tillgångarna, samt tillgångarnas korrelationsmatris kan en uppskattning på Ω genereras genom ekvation 4.26.

$$\Omega = diag(\tilde{\sigma})Kdiag(\tilde{\sigma}) \tag{4.26}$$

Där K är korrelationsmatrisen för tillgångarna och $\tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{m\Delta T}}\bar{\sigma}$ är den årliga standardavvikelsen erhållen med hjälp av den dagliga volatiliteten i ekvation 4.19.

Vikterna hos åsikterna

Matrisparametern P, specificerar vikterna hos de subjektiva åsikterna. Varje rad i matrisen anger vikten av en specifik åsikt angående överavkastningen av en eller flera tillgångar. Maximala antalet rader i matrisen är det totala antalet tillgångar i portföljen, dock behöver inte investeraren ha åsikter om samtliga tillgångar. Många investerare har relativa åsikter, till exempel att en tillgång ska överprestera relativt en annan. I en relativ synpunkt uppgår summan av matrisraden till noll, där den överpresterande tillgången tilldelas värdet ett och den underpresterande, minus ett. Flera relativa åsikter kan också respekteras av en enskild åsikt, tillexempel att tillgång A överpresterar tillgång B, samtidigt som tillgång C överpresterar tillgång D. Dock bör vikten som representeras i P-matrisen sammanfalla med tillgångarnas kapitaliseringsgrad. Om tillgång A, B är nio gånger större än tillgång C och D, bör tillgång A, B representeras av 0.9 respektive -0.9 samtidigt som tillgång C, D representeras av 0.1 och -0.1. Ifall tillgångarna skulle tilldelas samma vikter det vill säga 0.5 för över- och -0.5 för de underpresterande genereras större förändringar i de mindre tillgångsslagen, vilket skulle kunna leda till onödiga ”tracking error”.[6]

Eftersom de subjektiva åsikterna i examensarbetet kommer att hämtas från historisk data som avser samtliga tillgångarnas enskilda avkastning blir resultatet av P-matrisen en enhetsmatris, $I \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

Skalfaktorn τ

Parametern τ skalar kovariansmatrisen som avser överavkastningen erhållet från marknadsjämviktsläget. Enligt Litterman bestäms τ i avsikt att specificera kovariansmatrisen för feltermen ε^e i ekvation 3.25 vars distribution har väntevärdet noll.[9] Dock finns inga fullständiga riktlinjer utan endast olika tolkningar om hur parametern ska bestämmas. Enligt Black och Litterman sätts skalfaktorn τ nära noll. Ett alternativ som Lee använder är att sätta τ till ett värde mellan 0.01 och 0.05 för att sedan kalibrera modellen med avseende på tracking error. Andra som analyserat Black-Litterman modellen sätter värdet av τ till ett, eller till ett dividerat med antalet observationer.[6] Det är svårt att veta vilket alternativ som är lämpligast då de grundar sig på olika tolkningar av modellen, och där det inte finns något fullständigt korrekt svar.

Med hänsyn till ovanstående kommer τ till en början vara en variabel i examensarbetet. Osäkerheten för marknadsöveravkastningen ökar med τ:s storlek, vilket betyder att stora värden på τ kommer föra tillgångsallokering längre bort från markandsjämviktsvikterna och ta större hänsyn till åsikterna som representerar historisk data.

4.5.3 Förmögenhet och framtida premieinbetalningar

Det slutgiltiga målet för en pensionssparare är att besparingskapitalet är så stort som möjligt vid påbörjad pension. Självklart finns olika strategier för hur målet kan uppnås. De flesta vill betrygga sin pensionsförmögenhet och är nog eniga om att inte utsätta det besparade kapitalet för stora risker vid slutet av besparingshorisonten. För att där riskera att förlora en stor del av förmögenheten och samtidigt inte hinna kompensera förlusten. Risken i investeringarna kommer därmed förutom riskaversionskoefficienten, γ, att också regleras med en kvot bestående av de framtida premieinbetalningarna och den faktiska förmögenheten. Investeringarna blir mer riskaversiva desto mindre kvotvärdet blir. Eftersom de framtida premieinbetalningarna kommer övergå till att bli faktisk förmögenhet vid tidpunkten för utbetalning av premien blir kvoten med tiden mindre och kommer att vara noll vid den sista premieinbetalningen.

Storleken på premieutbetalningarna beror förutom bestämmelser i kollektivavtal på lönestorleken. Eftersom optimeringsmodellen endast tar hänsyn till relationen mellan de framtida premieinbetalningarna och kapitalet erhållen av förvaltning av de redan inbetalda premierna behövs ingen generalisering göras av faktisk storlek i kronor på premierna. Den procentuella reella ökningen av premieinbetalningarna som beror på årlig löneförhöjning och inflationsutveckling per år kommer antas vara 2 procent respektive. Antagandet för inflationen grundar sig på riksbankens inflationsmål. Avsnitten nedan beskriver inflations- och löneutvecklingen mer utförligt. Eftersom riskaversiva investeringar föredras antas den framtida reallöneökningen vara något lägre än det historiska genomsnittet sedan 1995.

I den slutgiltiga produkten kommer investeraren själv kunna ange det faktiska värdet av premieinbetalningarna som går till tjänstepension. De framtida premieinbetalningarnas nuvärde kommer då att uppskattas genom hänsyn till inflations- och löneutveckling. Investeraren kommer därmed att erhålla storleken på kapitaltillväxten anpassad till dennes premieinbetalning från arbetsgivaren. Ingen hänsyn kommer att tas till att den årliga löneökningen varierar mellan olika yrkes-, bransch- och åldersgrupper. Genom att årligen uppdatera storleken av de dåvarande premieinbetalningarna kommer i slutändan korrekt värde på det faktiska kapitalet att erhållas.

Inflation

Sveriges centralbank, Riksbanken har sedan Sverige övergick till flytande växelkurs som mål att upprätthålla ett fast penningvärde, detta genom att styra inflationen.

Målet preciseras sådan att den årliga inflationen, förändringen av konsumentprisindex, KPI, ska vara 2 procent. Besluten kring inflationsmålet ska även gå hand i hand med den allmänna ekonomiska politikens syfte, det vill säga att uppnå tillväxt och hög sysselsättning.

Motiveringen till målet på 2 procent är att inflationen ska vara så pass låg och stabil att penningpolitiken kan bidra till en god ekonomisk utveckling men hög nog för att skapa en buffert mot deflation. Denna buffert på 2 procent behövs för att kunna reglera reallöner och relativa priser. För att gynna en god sysselsättning kan det till exempel krävas att reallönen sänks, på samma sätt som att en negativ realränta ibland kan stimulera efterfrågan i ekonomin. Ett inflationsvärde på 2 procent ger Riksbanken gynnsammare förutsättningar för justering.

Att inflationen inte ska vara hög motiveras till att hög inflation har en benägenhet att variera mycket. En kombination av hög och oregelbunden inflation försvårar ekonomin i den meningen att det blir svårt för hushåll och företag att planera inför framtiden. Ekonomins förmåga att tilldela resurser försämras och kan leda till orättvisa omfördelningar av inkomster och förmögenheter.

Riksbanken styr inflationen främst genom att reglera reporäntan. Reporäntan är den ränta som staten erhåller vid utlåning till bankerna. En ändring i reporäntan medför att bankerna i sin tur ändrar sina belåningsräntor och därmed ökar eller minskar efterfrågan i marknaden, vilket leder till en förändrad prisutveckling. Det är svårt att avgöra vad den fullständiga effekten av en ändring innebär och det tar tid innan samtliga konsekvenser visar sig. Riksbanken strävar därför att närma sig målet två år fram i tiden. Marknadens förväntningar på framtida inflation är även starkt korrelerat med inflationsutvecklingen. Genom att Riksbanken är öppen om framtidsutvecklingar och beslut kring framtiden påverkar de markansförväntningarna och underlättar även för ekonomins aktörer att fatta ekonomiska beslut .[26]

Sedan övergången till flytande växelkurs 1993 har Riksbanken lyckats hålla inflationen relativt låg och stabil. Genomsnittsvärdet mellan 1993 och 2011 ligger på 1,6 procent, för att jämföras med inflationssnittet som låg på 7,9 procent under 1980-talet.[23]

Löneutveckling

Storleken på tjänstepensionskapitalet beror mycket på premieandelen och därmed löneutvecklingen. Premiestorleken är en given andel av lön som bestämts av kollektivavtal. Dessa premiestorlekar varierar mycket för anställda under olika kollektivavtal, och även andelen som är berättigad att investeras i en fondförsäkring. Variationen kan ses i tabell 2.2, där premiestorleken som tillåts investeras i fondförsäkring är mellan 2 till 4.5 procent på löneandelar upp till 7.5 prisbasbelopp och mellan 2 till 30 procent av löneandel överstigande 7.5 prisbasbelopp. Gemensamt för samtliga anställda är dock att högre lön ger högre premievärde.

Den individuella löneutveckligen varierar beroende på bransch, sektor och erfarenhet. Dessutom beror den generella löneutvecklingen mycket på samhällsekonomiska faktorer. Fram till mitten av 1990-talet, innan rörlig växelkurs och inflationsmålet på 2 procent var den nominella löneutvecklingen precis som inflationen hög och varierande. Den reella utvecklingen var dock större delen av mitten av 1970-till mitten av 1990-talet negativ. I samband med de ekonomiska förändringarna i landet och decentralisering av lönebildning har företag idag större möjlighet att påverka. Dessa samtliga faktorer har lett till att löneutvecklingen har stabiliserats något. Den nominella löneutvecklingen mellan 1995 och 2010 har en positiv förändring mellan 2.1 och 6.0 procent per år, där reallöneutvecklingen är mellan 0.2 och 5.5 procent med ett snitt på 2.4 procent för arbetare och tjänstemän.[25]

4.6 Utbetalningsström på kapitalet

Livbolagens utbetalningsström under samma förutsättningar som, storlek på besparat kapital, årlig avkastning och skatt på det totala kapitalet, varierar mycket. Det beror på att prognosräntan och den förväntade återstående medellivslängden varierar hos livbolagen. På hemsidan för *-Konsumenternas vägledning om bank och försäkring* redovisas vilka faktorer som gäller hos olika livbolag, däribland vilket livslängdsantaganden bolagen har för personer som är 65 år. Den matematik som används för beräkning av kvarstående livslängd och de resulterande utbetalningarna utifrån livslängden vid livslång utbetalning är dock hemliga hos bolagen. Sammanställning av olika fondförsäkringar inom tjänstepension visar att nästan samtliga bolag erbjuder kunderna livslånga utbetalning av kapitalet vilket också är den vanligaste utbetalningsformen eftersom det är det förvalda alternativet. Förutom livslång utbetalningstid erbjuder bolagen som kortast utbetalning på 5 år till beroende på bolag 20, 30, 40 eller till och med 50 år.[7] Livslängsantagandet vid 65 år varierar från 21 till 28.1 år beroende på bolag och kollektivavtal. Hög livslängsantagande resulterar i mindre utbetald summa per månad eftersom kapitalet ska fördelas i fler månader. Finansinspektionens livslängdsantagande för en 65 åring är 20.7 år vilket är lägre än samtliga bolags uppskattning. I regel förväntas även de som valt fondförsäkring leva längre än de som valt traditionell försäkring. [3]

Prognosräntan är livbolagens uppskattning av den framtida avkastningen på pensionskapitalet. Ett högt värde på prognosräntan innebär ett antagande om att pensionskapitalet förväntas växa i hög takt och det resulterar i att större proportioner av kapitalet delas ut i början av utbetalningsperioden. De framtida utbetalningarna kommer att öka något men inte i lika stora proportioner som vid en låg eller ingen prognosränta. Målet är att sätta prognosräntan så nära den framtida avkastningen så att ett jämnt belopp kan utdelas som succesivt ökar med inflationen för att bibehålla köpkraften. Om prognosräntan är för högt satt måste storleken av utbetalningarna sänkas, vilket kanske är anledningen till att de flesta bolag väljer att sätta prognosräntan till noll. Vid för låg eller ingen prognosränta styrs utbetalningen av den faktiska avkastningen. Vid ett antagande av en konstant avkastning resulterar det i mindre utbetalningar i början av utbetalningstiden som ökar mer markant än vid hög prognosränta.[7]

Både bolagens livslängdsantagande och prognosränta kan ändras under besparings- och utbetalningstiden. Vid livstidsutbetalning kommer alltid en del av kapitalet kvarstå vid bortgång. Ett sätt att skydda sig mot det är att självklart att välja en kortare utbetalningsperiod.

Enligt ansvarig aktuarie Gunnar Roos på ^{fm}Försäkringsmatematik är matematiken kring livbolagens utbetalningsström vid livstidsutbetalning väldigt oklar och varierande. Utbetalningsströmmen i examensarbetet kommer därmed att beräknas för önskat antal år genom klyvningstal. Storleken på utbetalningarna blir kvoten mellan kapitalet och antalet kvarstående utbetalningar, vilket benämns som klyvningstalet. Den årliga avkastningen på kapitalet och avkastningsskatten som egentligen beror på statlåneräntan antas vara fast och låg. Eftersom de flesta livbolag inte utgår från någon prognosränta och inte har någon utbetalningsavgift görs samma antagande.

Kapitel 5

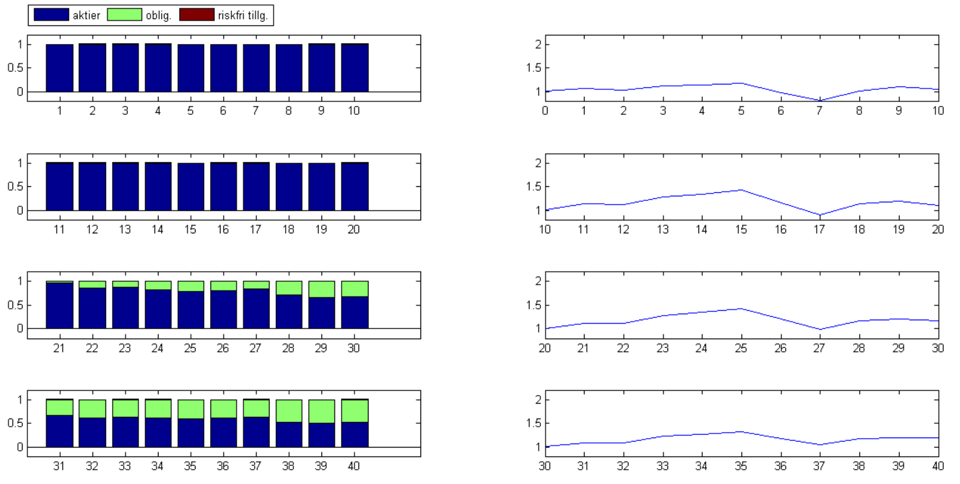
Resultat

Kapitlet presenterar resultatet av examensarbetet. Investeringsmodellens prestation visas mot historisk data, för att utvärderas mot olika värden på parametrarna τ och γ. Slutligen beskriver kapitlet hur modellen skulle kunna vidareutvecklas.

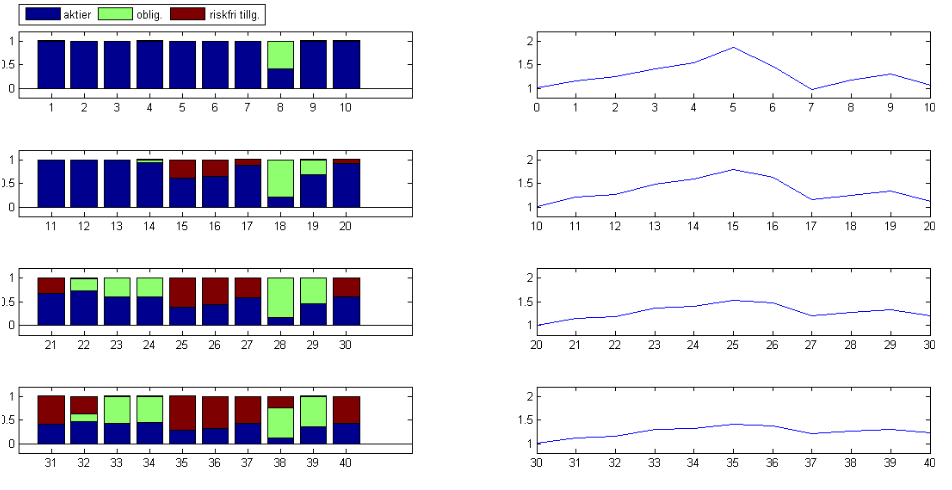
5.1 Investeringsmodell

Med små värden på skalfaktorn τ tar modellen större hänsyn till marknadsjämviktsläget vid CAPM än de subjektiva åsikterna bestående av historisk data. Vid extremfallet då $\tau \approx 0$ baserar modellen investeringsbesluten endast på marknadsjämviktsläget. Graferna i figur 5.1 visar tillgångsallokeringen och utvecklingen av kapitalet för olika investeringsåldrar vid ovan nämnda extrempunkt på τ. Med investeringsålder menas i rapporten antalet år en person har arbetat och fått premieinbetalning. Figurerna grundar sig alltså på en person som börjar arbeta vid 25 års ålder med investeringsålder 1 för att pensioneras 40 år senare, vid 65 år. Varje figur investerar över samma tioårsperiod. Figurerna visar tydligt övergången från aktier till den mindre riskfyllda obligationsfonden med ökande investeringsålder, vilket är väldigt rimligt.

Den andra extrempunkten på skalfaktorn τ är när $\tau \to \infty$ då modellen grundar investeringsbesluten endast på tillgångarnas historiska utveckling. Graferna i figur 5.2 visar tillgångsallokeringen och kapitalutvecklingen under samma förutsättningar som graferna ovan bortsett från värdet på τ, där $\tau \to \infty$. Det är en större andel investerat i obligation och den riskfria räntan jämfört med investeringsbeslut som grundats på jämviktsläget. Sett under tioårsperiod blir det med endast hänsyn på tillgångarnas historiska prestation något bättre slutkapital på förmögenheten. Modellen presterar klart bättre vid uppgång i marknaden, för att senare falla mer vid nedgångar.



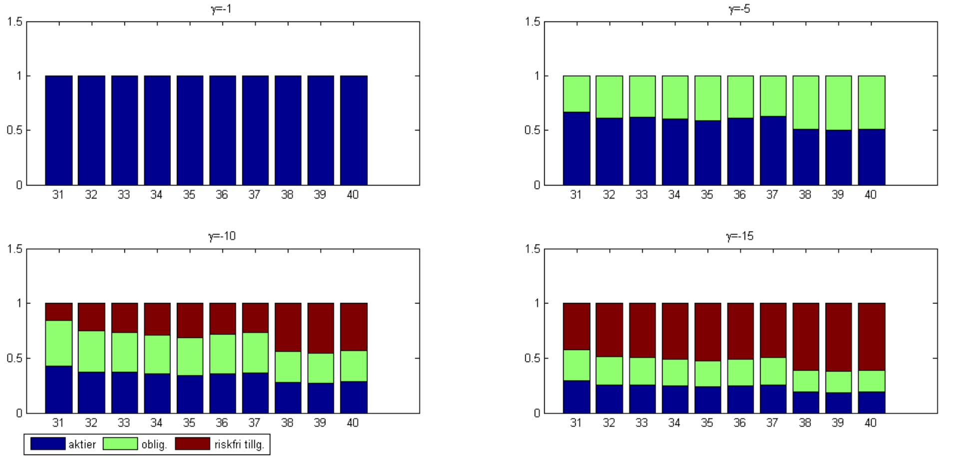
Figur 5.1. Stapeldiagrammen visar tillgångsallokeringarna och de högra graferna visar utveckling på förmögenhet under tioårsperiod för olika investeringsåldrar. Skalfaktorn $\tau \approx 0$ och $\gamma = -5$.



Figur 5.2. Stapeldiagrammen visar tillgångsallokeringarna och de högra graferna visar utveckling på förmögenhet under tioårsperiod för olika investeringsåldrar. Skalfaktorn $\tau \to \infty$ och $\gamma = -5$.

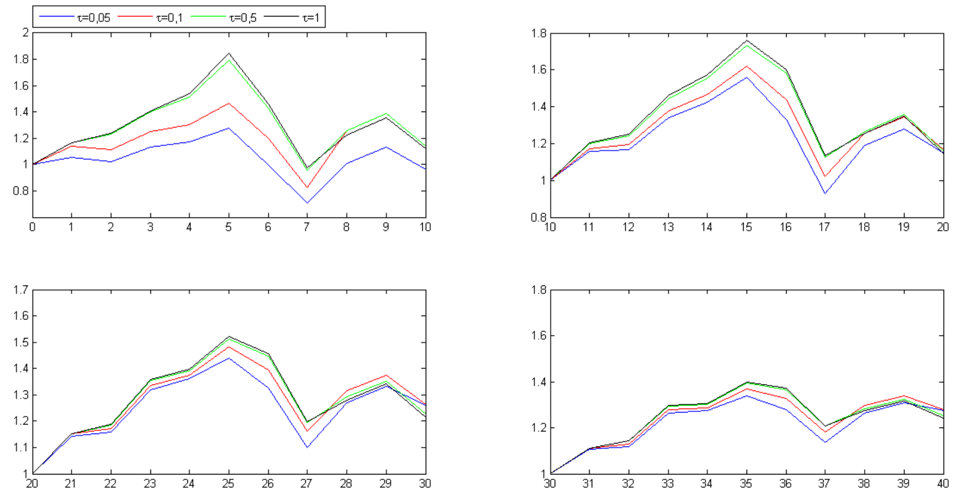
5.1.1 Parametrarna τ och γ

Båda figurerna 5.1 och 5.2 ovan visar tydligt övergången från aktier till säkrare investeringsslag med ökande investeringsålder. Riskaversionskoefficienten, γ påverkar takten på övergången. Stora negativa värden på γ bidrar till att en större del av allokeringen hamnar på de mindre riskfyllda tillgångarna under tidigare skede i investeringsperioden. Stapeldiagrammen i figur 5.3 visar tydligt hur tillgångsallokeringen intar säkrare tillgångar i samband med större negativa värden på riskaversionskoefficienten γ. Figurerna avser investering under de tio sista arbetsåren. Det är mest relevant att undersöka denna investeringsperiod eftersom det är viktigt att säkra förmögenheten då det är relativt kort tid kvar till pensionering och en stor del av premierna till tjänstepensionen har betalts. I den slutgiltiga produkten kommer investeraren själv kunna välja ett värde på γ som representerar dennes riskpreferens. Investeraren kommer även kunna reglera värdet årligen, vilket underlättar att bevara kapitalet genom att gå över till en mer riskaversiv investering vid en marknadsnedgång.



Figur 5.3. Tillgångsallokeringen för olika värden på riskaversionskoefficienten γ. Skalfaktorn $\tau \approx 0$ i samtliga grafer.

Svårigheten i investeringsmodellen är att hitta ett värde på τ som ger den bästa kombination av jämviktsläget enligt CAPM och tillgångarnas historikska prestation. I stycket 4.5.2 som avser skalfaktorn τ kan det läsas att ett rimligt värde på τ ska vara mellan intervallet, $1 \geq \tau > 0$. Eftersom de flesta pensionssparare är någorlunda riskaversiva fastställs riskaversionsparametern, γ till -5 vid undersökning av ett rimligt värde på skalfaktorn. Den genererade utvecklingen på förmögenheten kan ses för olika investeringsåldrar i tioårsperioder i graferna i figur 5.4. Diagrammen visar att de olika värdena på τ påverkar modellens prestation främst under de första investeringsåldrarna. Prestationsskillnaden avtar därefter med ökad investeringsålder. Eftersom modellen är implementerad så att den viktar om till säkrare investeringsslag med ökad kapital och minskad antal framtida premieinbetalningar påverkar inte skalfaktorns värde lika omfattande vid slutet av investeringsåldrarna. Det kan ses att de gröna och svarta linjernas värden lyckas generera något högre kapitalutveckling under de första investeringsåldrarna än de övriga då riskaversionskoefficienten, $\gamma = -5$. Skalfaktorns värde kan följaktligen sättas inom intervallet $1 \geq \tau \geq 0.5$. För ett säkerställande värde på skalfaktorn



Figur 5.4. Kapitalutvecklingen för olika värden på skalfaktorn τ. Riskaversionskoefficienten, $\gamma = -5$ i samtliga grafer.

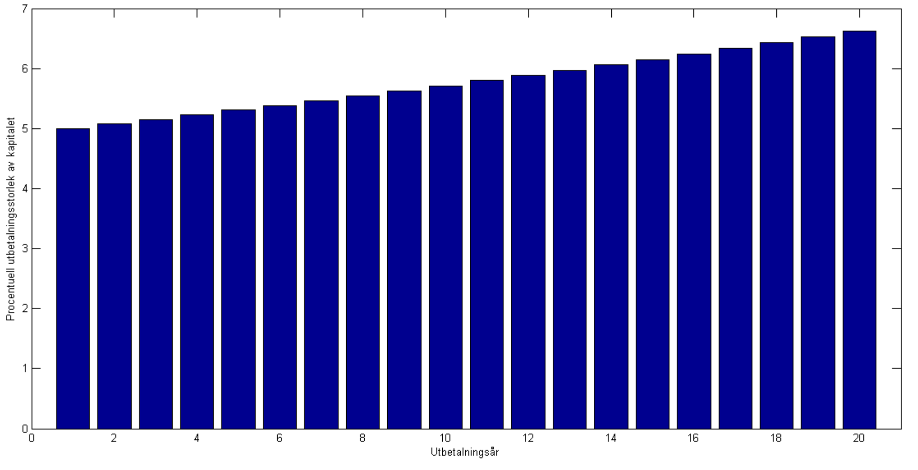
krävs dock en längre historisk utvärdering än de 10 befintliga åren.

5.2 Utbetalningsström

Den undersökta utbetalningsströmmen i examensarbetet är i sin enklaste form, och visualiseras i ett diagram för förtydligande av storleken av de årliga utbetalningarna. Eftersom de enskilda försäkringsbolagens beräkningar om de framtida livstidsutbetalningarna enligt aktuarie Gunnar Roos är något godtyckliga och komplexa kommer pensionsspararen få välja antal år som kapitalet ska utbetalas under. Figur 5.5 visar den årliga procentuella utbetalningen av kapitalet under 20 år. Den förväntade återstående livslängden för kvinnor och män i pensionsålder 65 år är 21,21 och 18,37 år.

5.3 Vidareutveckling

Eftersom examensarbetet ska hålla sig inom en tidsram har en del begräsningar gjorts vid implementering av modellen vilket gör att det finns möjligheter till vidareutveckling. Modellen skulle kunna vidareutvecklas genom en stokastisk programmerings modell där investeringsbesluten baserar sig på en simulerad framtidsutveckling. Istället för att anta att tillgångarnas avkastning är normalfördelade kan en bättre process användas som ger en mer korrekt avspegling av marknaden. Till exempel en GARCH Poissionprocess som kan ta hänsyn till information som påverkar fondpriset på tillgångarna och därmed generera tjockare svansar på fördelningen. De tjocka svansarna på GARCH Poissonprecessens- fördelning speglar



Figur 5.5. Pensionskapitalets utbetalningsström under 20 år.

fler extremfall som kan uppstå i marknaden. Utveckla modellen från enperiodsmodell till flerstegsmodell och därmed kunna ta hänsyn till skatter, courtage och skillnader i köp- och säljkurser. Den nuvarande modellens risk justeras med riskaversionskoefficient γ och kvoten mellan framtida premieinbetalningar och faktiskt erhållen förmögenhet. Risken skulle även kunna kompletteras med Value at Risk, VaR eller Conditional Value at Rrisk, CVaR. Implementering av VaR ser till att en förlust med sannolikheten α inte blir större än VaR under studerande tidsperioden och CVaR reglerar den förväntade förlusten som överstiger VaR.

Premiestorleken i modellen skulle kunna individanpassas. Den faktiska premiestorleken beror på lönestorlek vars utveckling kan variera mycket mellan olika yrken, branscher och åldrar. I den befintliga modellen görs ett generellt antagande att den reella löneutvecklingen är två procent per år med samma värde på den årliga inflationen vilket självklart inte stämmer in i verkligheten.

Modellen undersöker endast förvaltning av pensionskapital fram till pensionsålder, därmed finns stora utvecklingsmöjligheter av förvaltning av kapitalet under pensionstid då kanske andra strategier är mer lämpliga än de som valts för modellen. Utbetalningsströmmen är konstruerad i sin enklaste form för utbetalning under antal önskvärda år. Det är svårt att göra en generell undersökning av livstidsutbetalning eftersom livbolagen utgår ifrån olika parametrar i de matematiska modellerna och kanske till och med utgår från olika modeller. Däremot skulle en undersökning på den framtida statslåneräntan[1] och inflationen genereras för en uppskattning på den årliga avkastningsskatten och justering av andelen på utbetalningarna som även skulle kunna användas vid uppskatting av de framtida premieinbetalningarna.

[1]Avskattningsskatten för pensionsförsäkring utgör 15 procent av statslåneräntan.

Slutligen skulle tillgångsslagen kunna utvecklas till de befintliga tillgångarna som finns för fondförsäkring, dock krävs lång historisk data vilket inte alltid finns tillgängligt då många av tillgångarna kan vara relativt nya.

Kapitel 6

Appendix

6.1 Lagrangerelaxering av ekvation 3.11

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T C x \\ d\text{å} \quad & \mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned}$$

$$\texttt{Lagrangerelaxering} : \min \frac{1}{2}x^T C x + v(1 - \mathbf{1}^T x)$$

$$\begin{aligned} \texttt{KKT} : Cx - \mathbf{1}v &= 0 \qquad (1) \\ \mathbf{1}^T x &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Ekvation (1)

$$\begin{aligned} Cx - \mathbf{1}v = 0 &\Leftrightarrow \\ Cx = \mathbf{1}v &\Leftrightarrow \\ \mathbf{1}^T C^{-1} C x = \mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}v &\Leftrightarrow \\ \frac{\mathbf{1}^T x}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} = v & \end{aligned}$$

Det andra KKT villkoret insatt i ekvationen ger,

$$v = \frac{1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}},$$

och parametern, v, insatt i det första KKT villkoret ger lösningen på x.

$$\begin{aligned} Cx - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} = 0 &\Leftrightarrow \\ Cx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} &\Leftrightarrow \\ x = C^{-1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} & \end{aligned}$$

6.2 Lagrangerelaxering av ekvation 3.13

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu^T x - \frac{1}{2} x^T C x \\ då \quad & \mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned}$$

$$\texttt{Lagrangerelaxering} : \max \mu^T x - \frac{1}{2} x^T C x + v(1 - \mathbf{1}^T x)$$

$$\begin{aligned} \texttt{KKT} : \mu - Cx - \mathbf{1}v &= 0 \qquad (1) \\ \mathbf{1}^T x &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Ekvation (1)

$$\begin{aligned} \mu - Cx - \mathbf{1}v = 0 &\Leftrightarrow \\ \mu - Cx = \mathbf{1}v &\Leftrightarrow \\ C^{-1}\mu - C^{-1}Cx = C^{-1}\mathbf{1}v &\Leftrightarrow \\ \mathbf{1}^T C^{-1}\mu - \mathbf{1}^T C^{-1} Cx = \mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}v &\Leftrightarrow \\ \frac{\mathbf{1}^T C^{-1}\mu - \mathbf{1}^T x}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}} = v & \end{aligned}$$

Det andra KKT villkoret insatt i ekvationen ger,

$$v = \frac{\mathbf{1}^T C^{-1}\mu - 1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}},$$

och parametern, v, insatt i det första KKT villkoret ger lösningen på x.

$$\begin{aligned} \mu - Cx - \frac{\mathbf{1}C^{-1}\mu - 1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}}\mathbf{1} = 0 &\Leftrightarrow \\ Cx = \mu - \frac{\mathbf{1}C^{-1}\mu - 1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}}\mathbf{1} &\Leftrightarrow \\ x = C^{-1}(\mu - \frac{\mathbf{1}C^{-1}\mu - 1}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}}\mathbf{1}) & \end{aligned}$$

6.3 Lagrangerelaxering av ekvation 3.16

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T C x \\ då \quad & \mu^T x + y r_f = \bar{\mu} \\ & \mathbf{1}^T x + y = 1 \end{aligned}$$

Eftersom det andra bivillkoret kan skrivas om till $y = 1 - \mathbf{1}^T x$ kan optimeringsproblemets bivillkor skrivas om till endast ett bivillkort.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T C x \\ då \quad & (\mu - \mathbf{1}r_f)^T x = \bar{\mu} - r_f \end{aligned}$$

$$\texttt{Lagrangerelaxering} : \min \quad \frac{1}{2}x^T Cx + v\left(\bar{\mu} - r_f - (\mu - \mathbf{1}r_f)^T x\right)$$

$$\texttt{KKT} : Cx - (\mu - \mathbf{1}r_f)v = 0 \qquad (1)$$

$$(\mu\mathbf{1}r_f)^T x = \bar{\mu} - r \qquad (2)$$

Ekvation (1)

$$\begin{aligned} Cx - (\mu - \mathbf{1}r_f)v = 0 &\Leftrightarrow \\ x &= C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)v \end{aligned}$$

Parametern x insatt i andra KKT villkoret ger parametern v.

$$\begin{aligned} (\mu - \mathbf{1}r_f)^T x = \bar{\mu} - r_f &\Leftrightarrow \\ (\mu - \mathbf{1}r_f)^T C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)v = \bar{\mu} - r_f &\Leftrightarrow \\ v &= \frac{\bar{\mu} - r_f}{(\mu - \mathbf{1}r_f)^T C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)} \end{aligned}$$

Parametern v, ger tillsammans med första KKT villkoret parametern x.

$$x(\bar{\mu}) = \frac{(\bar{\mu} - r_f)C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)}{(\mu - \mathbf{1}r_f)^T C^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f)}$$

Litteraturförteckning

[1] Alecta. Så funkar tjänstepension, http://www.alecta.se/Privat/Pensionens-delar/Sa-funkar-tjanstepension/, hämtad 2011-05-30.

[2] AMF. Privat pensionssparande, http://www.amf.se/Se-over-ditt-sparande/Sa-fungerar-pensionssystemet/Privat-pensionssparande/, hämtad 2011-05-30.

[3] Annika Creutzer. *Viktigt att bedöma vår livslängd. E24 Näringsliv*, 2010-12-23.

[4] Datastream_Government_Bond_Indices. Datastream government bond indices.

[5] Juan Flores. *Har man många jobb blir det kaos. DAGENS NYHETER EKONOMI*, 2011-05-09.

[6] Tomas M. Idzorek. A step-by-step guide to the black-litterman model, -incorporating user-specified confidence levels, http://www.indiceperu.com/lecturas/paper13.pdf, 2005-07-20.

[7] Konsumenternas_Vägledning_om_Bank_och_Försäkring. Stora skillnader i bolagens pensionsutbetalningar, http://www.bankforsakring.konsumenternas.se/Sidfot/Om-oss/Aktuellt/Stora-skillnader-i-forsakringsbolagens-pensionsutbetalningar/, hämtad 2012-02-9.

[8] KP_Pension&Försäkring. Ditt försäkringsskydd i kp, http://www.kp.se/Web/index.nsf/0/B1E70CF620EEB69FC1256DDB00316960?OpenDocument, hämtad 2011-05-14.

[9] Bob Litterman. *MODERN INVESTMENT MANAGEMENT; AN EQUILIBRIUM APPROACH*, chapter Beyond Equilibrium, the Black-Litterman Approach. John Wiley & Sons, Inc, New Jersey, 2003.

[10] David G. Luenberger. *Investment Science*. Oxford University Press, Oxford, 1998.

[11] Charlotta Markert. The black-litterman model-matematical and behavioral finance approaches towards its use in practice. *Kungliga Tekniska Högskolan*, 2006-06-15.

[12] NASDAQ_OMX. http://nordic.nasdaqomxtrader.com/trading/fixedincome/Sweden/stibor/, hämtad 2012-01-23.

[13] Stephan Satchell och Alan Scowcroft. A demystification of the black-litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 2000-01-20.

[14] Noël Amenc och Veronique Le Sourd. *Portfolio theory and performance analysis*, chapter The Basic Elements of Modern Portfolio Theory. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, West Sussex, 2003.

[15] PENSIONS_MYNDIGHETEN. Så fungerar pensionen, http://www.pensionsmyndigheten.se/Tjanstepensionen.html, hämtad 2011-04-17.

[16] Pensions_Myndigheten. Orange rapport pensionssystemets Årsredovisning 2010, https://secure.pensionsmyndigheten.se/download/18.2c8f793e1335aaf986a8000282068/OR+2010.pdf. Hämtad 2011-04-22.

[17] Pensionsvalet. Det här är kfo-lo:s avtalsförsäkringar, http://www.pensionsvalet.se/For-anstallda/KFO-LO/, 2011-04-17.

[18] PwC. Riskpremien på den svenska aktiemarknaden, http://www.pwc.se/sv_SE/se/publikationer/assets/pdf/riskpremiestudien-2011.pdf, hämtad 2012-01-30.

[19] Sjunde_AP-fonden. Ap7-såfa, http://www.ap7.se/sv/vara-produkter/det-forvalda-alternativet/AP7-Safa/#30, hämtad 2011-05-26 (sidan har ändrats till angiven URL adress).

[20] Sjunde_AP-fonden. Faktablad för ap7 aktiefond, http://www.ap7.se/Documents/PDF/Policies/faktablad_ap7_aktiefond_100521.pdf, hämtad 2011-05-27.

[21] Sjunde_AP-fonden. Faktablad för ap7 räntefond, http://www.ap7.se/Documents/PDF/Policies/faktablad_ap7_rantefond_100521.pdf, hämtad 2011-05-27.

[22] SP_statens_tjänstepensionsverk. Tjänstepension PA03, http://www.spv.se/Privatperson/Tjanstepension-PA-03/, hämtad 2012-02-23.

[23] Statistiska_centralbyrån. Konsumentprisindex (KPI), http://www.scb.se/Pages/TableAndChart____33831.aspx, hämtad 2012-01-10.

[24] Svensk_Näringsliv_Försäkringsinformation. Försäkringar på arbetsmarknaden enligt lag och kollektivavtal 2011. *Svensk Näringsliv Försäkringsinformation*, 2011.

[25] Svenskt_Näringsliv. Löneutveckling, BNP och KPI, http://www.svensktnaringsliv.se/fragor/fakta_om_loner_och_arbetstid/f2011/fola-2011-loneutveckling-bnp-och-kpi_135691.html, hämtad 2012-01-10.

[26] Sveriges_Riksbank. Penningpolitiken i sverige 2010, http://www.riksbank.se/upload/Dokument_riksbank/Kat_publicerat/ Rapporter/2010/Penningpolitiken_2010.pdf, hämtad 2012-01-10.

[27] Thomson_Reuters. Datastream find your way to alpha, http://online.thomsonreuters.com/datastream/, hämtad 2012-02-02.